











# كتاب

القواعد الجلية في الأعمال التجريبية  
شامل برنامجي الجبر للعاهد الدينية والمدارس الثانوية

---

تأليف

محمد افندى ادريس

مدرس رياضة بمدرسة المعلمين الناصرية

---

الجزء الثاني

خاص بباقي برنامج المدارس الثانوية

---

(جميع الحقوق محفوظة لتؤلف)

---

(الطبعة الثانية)

بعد تنقيحها وإضافة زيادات نافعة بها

بالمطبعة الأميرية بمصر

١٣٣٩ هـ - ١٩١١ م

## بسم الله الرحمن الرحيم

### المربع والجذر التربيعي

١٥١ تعريف - مربع أى كمية هو حاصل ضربها في نفسها مساويين لها

$$\text{مثلا مربع } a \text{ هو } a \times a = a^2$$

$$\text{ومربع } -a \text{ هو } -a \times -a = a^2$$

١٥٢ قاعدة - مربع حاصل ضرب عدة عوامل يساوي حاصل ضرب مربعاتها

$$\text{مثلا } (a \times b)^2 = a^2 \times b^2 \text{ لان } (a \times b) \times (a \times b) = a \times a \times b \times b$$

١٥٣ نتيجة - لتربيع حد يربع مكرره وتضاعف أسس حروفه  
فمربع  $a^3 \times a^2 = a^5$  ومربع  $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

تنبيه - تقدم بقرة ٤٣ قانون مربع كمية ذات جانبين  
وبقرة ٥١ قانون مربع كمية كثيرة الحدود

١٥٤ تعريف - قوة أى كمية بدرجة ما هى حاصل ضرب عوامل مساوية لها عددها بقدر درجة القوة



أعني  $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^0} = x^0$  بقدرم

وبالقياس على ما سبق يكون  $(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{H}$ ،

$$D \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومن هنا يؤخذ أنه لرفع حد إلى درجة ما يرفع مكرهه إلى هذه الدرجة وتضرب أسس حروفه فيها

تنبیه - تقدم (بمذرة ٣٥) بيان علامات قوى الحدود الموجبة والسالبة

١٥٥ تعريف - الجذر التربيعي لكمية هوكية اذا رفعت الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

مثلاً  $r = \sqrt{2}$  ,  $r = \sqrt{2}$

$$s \geq \frac{1}{r} = \sqrt{s \geq \frac{1}{s}} \quad \text{و}$$

لأنه إذا رفع كل منها الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

١٥٦ قاعدة - الجذر التربيعي لحاصل ضرب عدة عوامل

يساوى حاصل ضرب الجذور التربيعية لها

مثلاً  $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$  لأن  $(\overline{p \vee q}) \vee (p \wedge q) = 1$

$$ds^2 = (\sqrt{A})^2 \times (\sqrt{S})^2 \times (\sqrt{D})^2 =$$

١٥٧ نتيجة - لايجاد الجذر التربيعي لحد يؤخذ الجذر التربيعي

لمكرره وتنصف أسس حروفه

مثلاً  $s^2 \geq \frac{1}{2} = \sqrt{s^2 \geq \frac{1}{17}}$  ,  $s^2 \geq 8 = \sqrt{s^2 \geq 64}$

ومن هنا يؤخذ انه لايجاد جذر حد بدرجة ما يؤخذ جذر مكرره  
بهذه الدرجة وتقسم أسس حروفه عليها

١٦١ إذا لم تقبل الاسس القسمة على دليل الجذر فتوضع على هيئة كسور

مثلا  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  ,  $\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$  ,  $\sqrt[6]{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{5}}$  لانه اذا رفعت الكمية  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  للدرجة الثالثة , و  $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$  للدرجة الخامسة , و  $\sqrt[6]{\frac{4}{5}}$  للدرجة السادسة نجعت الكميات الاصلية

١٦٢ يؤخذ مما تقدم أن الحرف ذا الأس الكسرى هو عبارة عن جذر دليله المقام لهذا الحرف باس يساوى البسط

١٦٣ مقادير الجذور التربيعية - لكل كمية موجبة جذران تربيعيان متساويان في المقدار المطلق ومختلفان في العلامة

مثلا  $\sqrt{25} = 5$  ,  $\sqrt{25} = -5$  لان  $25 = 5 \times 5$  ,  $25 = (-5) \times (-5)$  ويكتب  $\sqrt{25} = \pm 5$  ويقرأ زائدا أو ناقصا خمسة وعموما  $\sqrt{a} = \pm \sqrt{a}$

١٦٤ تنبيه - حيث ان القوى الفردية للحدود الموجبة تكون موجبة وللحدود السالبة تكون سالبة فيؤخذ من ذلك أن علامة الجذر

التكميبي لحد هى عين علامة ذلك الحد أعنى  $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}$  ,  $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

١٦٥ قاعدة - لايجاد الجذر التربيعى لكبة كثيرة الحدود ترتب هذه الكبة بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف فيها ويؤخذ الجذر التربيعى لاول حد منها فينتج أول حد من الجذر يطرح مربعه من الكبة المفروضة ثم يقسم أول حد من الباقي على ضعف الجذر فينتج الحد الثانى من الجذر ثم يضعف أول حد من الجذر ويضاف اليه الحد الثانى ويضرب المجموع فى الحد الثانى ويطرح الحاصل من الباقي الاول ثم يقسم أول حد من الباقي الثانى على ضعف أول حد من الجذر فينتج ثالث حد من الجذر ثم يضعف الحدان الاولان ويضاف لهما الحد الثالث ويضرب المجموع فى الحد الثالث ويطرح الحاصل من الباقي الثانى ويستمر فى العمل هكذا حتى تنتهى العملية

مثلا لايجاد الجذر التربيعى لكبة  $٩ ح^٤ + ٤٦ ح^٢ س + ٢٥ س^٢$   
 —  $٣ س^٢$  —  $٤٠ ح^٢ س$  —  $٢٤ ح^٤$  —  $٩ ح^٤$   
 ترتبها بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ح ونجرى العمل هكذا

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $٢٣ ح^٣ - ٤٤ ح س + ٢٥ س^٢$   | $٩ ح^٤ - ٢٤ ح^٣ س + ٤٦ ح^٢ س - ٤٠ ح س^٢ + ٢٥ س^٢$ |
| $٢٦ ح^٢ س - ٤٤ ح س + ٢٥ س^٢$ | $٩ ح^٤ - ٢٤ ح^٣ س + ٤٦ ح^٢ س - ٤٠ ح س^٢ + ٢٥ س^٢$ |
| $٢٤ ح س - ٤٠ ح س + ٢٥ س^٢$   | $٩ ح^٤ - ٢٤ ح^٣ س + ٤٦ ح^٢ س - ٤٠ ح س^٢ + ٢٥ س^٢$ |
| $٢٦ ح^٢ س - ٤٤ ح س + ٢٥ س^٢$ | $٩ ح^٤ - ٢٤ ح^٣ س + ٤٦ ح^٢ س - ٤٠ ح س^٢ + ٢٥ س^٢$ |
| $٢٥ س^٢$                     | $٩ ح^٤ - ٢٤ ح^٣ س + ٤٦ ح^٢ س - ٤٠ ح س^٢ + ٢٥ س^٢$ |

وكيفية العمل أن نستخرج جذر الحد الاول  $٩$   $\sqrt{٩}$  فينتج  $٣$   $\sqrt{٣}$  ربع هذا الحد ونطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم نقسم الحد الاول من الباقي وهو  $٢٤$   $\sqrt{٢٤}$  على ضعف الجذر أى على  $٦$   $\sqrt{٦}$  فينتج  $٤$   $\sqrt{٤}$  وهو ثاني حد من الجذر ثم نضعف الحد الاول ونضيف الى هذا الضعف الحد الثاني فينتج  $٦$   $\sqrt{٦}$  —  $٤$   $\sqrt{٤}$  يضرب في الحد الثاني وهو —  $٤$   $\sqrt{٤}$  فينتج  $٢٤$   $\sqrt{٢٤}$  +  $١٦$   $\sqrt{١٦}$  ويطرح هذا الحاصل من الباقي الاول ثم يقسم أول حد من الباقي الثاني وهو  $٣٠$   $\sqrt{٣٠}$  على ضعف الحد الاول من الجذر وهو  $٦$   $\sqrt{٦}$  فينتج  $٥$   $\sqrt{٥}$  وهو ثالث حد من الجذر ثم نضاعف الجدين الاولين ونضيف لهما الحد الثالث فينتج  $٦$   $\sqrt{٦}$  —  $٨$   $\sqrt{٨}$  +  $٥$   $\sqrt{٥}$  نضربه في الحد الثالث  $٥$   $\sqrt{٥}$  ينتج  $٣٠$   $\sqrt{٣٠}$  —  $٤٠$   $\sqrt{٤٠}$  +  $٢٥$   $\sqrt{٢٥}$  فنطرح هذا الحاصل من الباقي الثاني فلا يبقى شيء

**١٦٦** تنبيه - لا يمكن إيجاد الجذر التربيعي لكية الا اذا كانت مربعا كاملا

ويعلم أن الكية غير مربع كامل بعد ترتيبها بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف فيها اذا كان الحد الاول غير مربع كامل أو كان الحد الثاني لا يقبل القسمة على ضعف جذر الحد الاول وكذلك اذا كان الحد الاخير غير مربع كامل أو كان الحد الذي قبله مباشرة لا يقبل القسمة على ضعف جذره أو كان الحد الاول من أى باق لا يقبل القسمة على ضعف الحد الاول من الجذر

١٦٧ تنبيه - الكية ذات الحدين لا تكون مربعا كاملا مطلقا  
لأن مربع الحد هو حد ومربع ذات الحدين يشتمل على ثلاثة حدود  
ومربع كثيرة الحدود هو كية كثيرة الحدود

## تسرين ٤١

ما مربع كل من الكميات

|                                   |                       |
|-----------------------------------|-----------------------|
| (٥) $\frac{p}{s}$ و $\frac{h}{s}$ | (١) $s - s^2$ و $h^2$ |
| (٦) $\frac{p}{s}$ و $\frac{h}{s}$ | (٢) $s^2 - s$ و $h^2$ |
| (٧) $s$ و $h$                     | (٣) $s^2 - s$ و $h^2$ |
| (٨) $s$ و $h$                     | (٤) $s^2$ و $h^2$     |

أوجد مقادير الكميات الآتية

|                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| (١٣) $\frac{p^2}{s}$ | (٩) $s^2$ و $h^2$  |
| (١٤) $\frac{p^2}{s}$ | (١٠) $s^2$ و $h^2$ |
| (١٥) $\frac{p^2}{s}$ | (١١) $s^2$ و $h^2$ |
| (١٦) $s$ و $h$       | (١٢) $s^2$ و $h^2$ |

أوجد مقادير الجذور التربيعية للحدود الآتية

|                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| (٢١) $s^2$ و $h^2$ | (١٧) $s^2$ و $h^2$ |
| (٢٢) $s^2$ و $h^2$ | (١٨) $s^2$ و $h^2$ |
| (٢٣) $s^2$ و $h^2$ | (١٩) $s^2$ و $h^2$ |
| (٢٤) $s^2$ و $h^2$ | (٢٠) $s^2$ و $h^2$ |

ابحث من مقادير الكميات الاتية

$$\begin{array}{c|c} \sqrt[7]{\text{د}^{\circ}} \quad (٢٨) & \sqrt[٣]{\text{ح}^٣ \text{د}^٣} \quad (٢٥) \\ \sqrt[٦]{\text{د}^{\circ}} \quad (٢٩) & \sqrt[٥]{\text{د}^{\circ} \text{ح}^{\circ}} \quad (٢٦) \\ \sqrt[٤]{\text{ح}^{\circ}} \quad (٣٥) & \sqrt[٤]{\text{ح}^{\circ} \text{د}^{\circ}} \quad (٢٧) \end{array}$$

المطلوب إيجاد الجذور التربيعية للكميات الاتية

$$\begin{array}{l} (٣١) \text{ س}^٢ - ٢ \text{ س} + ١ \\ (٣٢) \text{ س}^٢ + ٤ \text{ س} + ٤ \\ (٣٣) \text{ س}^٤ - \frac{١}{٢} \text{ س}^٢ + \frac{١}{١٦} \\ (٣٤) ٤ \text{ ح}^٤ - ١٢ \text{ ح}^٣ \text{ د} + ٢٥ \text{ ح}^٢ \text{ د}^٢ - ٢٤ \text{ ح} \text{ د}^٣ + ١٦ \text{ د}^٤ \\ (٣٥) ٩ \text{ س}^٤ + ١٢ \text{ س}^٣ \text{ ص} - ٢ \text{ س}^٢ \text{ ص}^٢ - ٤ \text{ س} \text{ ص}^٣ + \text{ص}^٤ \\ (٣٦) \frac{١}{٤} \text{ ح}^٤ + \frac{١}{٢} \text{ ح}^٣ \text{ د} + \frac{١٣}{٣٦} \text{ ح}^٢ \text{ د}^٢ + \frac{١}{٦} \text{ ح} \text{ د}^٣ + \frac{١}{١٦} \text{ د}^٤ \\ (٣٧) \text{ س}^٤ + ٢ \text{ س}^٣ + ٣ \text{ س}^٢ + ٢ \text{ س} + ١ \\ (٣٨) ١٦ \text{ س}^٢ - ٢٤ \text{ س}^٥ + ٢٥ \text{ س}^٤ - ٢٠ \text{ س}^٣ + ١٠ \text{ س}^٢ \\ - ٤ \text{ س} + ١ \\ (٣٩) ٢٥ \text{ ح}^٤ + ٤٩ \text{ ح}^٢ \text{ د} + ١٦ \text{ د}^٢ - ٣٠ \text{ ح}^٣ \text{ د} - ٢٤ \text{ ح} \text{ د}^٣ \\ (٤٠) ١٦ \text{ ح}^٥ \text{ د} + ٤ \text{ ح}^٤ \text{ د}^٢ + ١٠ \text{ ح}^٣ \text{ د}^٣ + ٩ \text{ ح}^٢ \text{ د}^٤ - ١٢ \text{ ح} \text{ د}^٥ \text{ د} \\ - ٤ \text{ ح}^٤ \text{ د}^٥ \end{array}$$

## الاسس

١٦٨ تمهيد - تعلم (بنمرة ٤) ان درجة قوة كمية تبين بعدد مضاربها وان هذا العدد يوضع فوق الكمية ويسمى اس

أى ان  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  وان  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  مرات  
بقدر ٢

وتقدم (بنمرة ٦٠) ان الحرف ذا الاس الصفر يساوى واحدا

أى ان  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

وتقدم (بنمرة ٦٢) ان الحرف ذا الاس السالب يساوى كسرة  
بسطه واحدا ومقامه هذا الحرف باسه موجبا

أى ان  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

وتقدم (بنمرة ١٦٢) ان الحرف ذا الاس الكسرى عبارة عن  
جذر دليلة المقام لهذا الحرف باس يساوى البسط

أعنى ان  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**١٦٩** يؤخذ مما ذكر ان الاس يكون موجبا أو سالبا صحيحة  
أو كسريا أو معدوما (صفر) ومن حيث ان القواعد الاساسية التى  
يحتاج فيها الى اجراء عمليات على الاسس هى ضرب وقسمة الحدود  
ورفعها الى قوة واستخراج جذورها وقد تقدم الكلام على كل منها  
فى محله بايضاح تام فى حالة ما اذا كانت الاسس صحيحة وموجبه  
فالذى نريد بيانه الآن هو ان تلك القواعد عامة وتنطبق تمام  
الانطباق على الاسس السالبة والكسرية والعدمية ولتوضيح  
ذلك نقول



١٧٠ الضرب  $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$  مهما كان  $a$ ، و

أولا - إذا كان  $a = -b$ ،  $-b = -a$ ، فيكون

$$-b \times -a = (-b) \times (-a) = a \times b$$

لأن  $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$ ،  $\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$  فيكون

$$-b \times -a = \frac{1}{\frac{1}{-b}} \times \frac{1}{\frac{1}{-a}} = \frac{1}{-\frac{1}{b}} \times \frac{1}{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}$$

$$a^5 = a^2 \times a^3 \quad \text{تطبيق}$$

ثانيا - إذا كان  $a = \frac{b}{c}$ ،  $\frac{b}{c} = \frac{a}{\frac{c}{b}}$  يكون

$$\frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{b}{\frac{c}{b}} \times \frac{c}{b} = \frac{b \times c}{\frac{c}{b}}$$

$$\text{وذلك لأن } \frac{b}{\frac{c}{b}} = \frac{b}{c} \times \frac{b}{b} = \frac{b}{c}$$

فيكون  $\frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{b}{\frac{c}{b}} \times \frac{c}{b} = \frac{b \times c}{\frac{c}{b}}$  رفع الطرفين لدرجة و

$$\left(\frac{b}{c} \times \frac{c}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{\frac{c}{b}} \times \frac{c}{b}\right)^2 \quad \text{أو}$$

$\left(\frac{b}{c} \times \frac{c}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{\frac{c}{b}} \times \frac{c}{b}\right)^2$  نأخذ جذر الطرفين بدرجة و

$$\frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{b}{\frac{c}{b}} \times \frac{c}{b} \quad \text{أو}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{\frac{c}{b}} \times \frac{c}{b}$$

وإذا اختلف المقامان يجلس الكسران ابتداء (عند البرهان)

$$\frac{17}{20} \text{ ح} = \frac{1}{2} \text{ ح} \times \frac{17}{10} \text{ ح}, \frac{1}{2} \text{ ح} = \frac{1}{2} \text{ ح} \times \frac{1}{1} \text{ ح}$$

ثالثا - إذا كان م = ٠ ، و ٥ = - ب فيكون

$$\frac{0}{5} \text{ ح} = \frac{0}{5} \text{ ح} \times \frac{1}{1} \text{ ح}$$

وذلك لأن  $\frac{0}{5} \text{ ح} = 1 \text{ ح}$  فيكون

$$\frac{0}{5} \text{ ح} \times 1 = \frac{0}{5} \text{ ح} \times 1 = \frac{0}{5} \text{ ح}$$

وقس على هذا إذا كانت إحدى الكيتين ذات اس موجب أو سالب أو كسرى والآخرى مخالفة لها في الاس

### تمرين ٤٢

المطلوب اجراء عمليات الضرب الآتية

|   |  |
|---|--|
| $\frac{2}{5} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (٩)  | $\frac{0}{5} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (١) |
| $\frac{1}{3} \text{ ح} \times \frac{2}{2} \text{ ح}$ (١٠) | $\frac{4}{2} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (٢) |
| $\frac{3}{5} \text{ ح} \times \frac{2}{5} \text{ ح}$ (١١) | $\frac{0}{5} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (٣) |
| $\frac{2}{5} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (١٢) | $\frac{3}{5} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (٤) |
| $\frac{1}{4} \text{ ح} \times \frac{1}{4} \text{ ح}$ (١٣) | $\frac{3}{5} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (٥) |
| $\frac{2}{3} \text{ ح} \times \frac{1}{3} \text{ ح}$ (١٤) | $\frac{2}{5} \text{ ح} \times \frac{3}{5} \text{ ح}$ (٦) |
| $\frac{2}{7} \text{ ح} \times \frac{1}{7} \text{ ح}$ (١٥) | $\frac{1}{3} \text{ ح} \times \frac{2}{2} \text{ ح}$ (٧) |
|   | $\frac{1}{5} \text{ ح} \times \frac{2}{5} \text{ ح}$ (٨) |

١٧١ القسمة  $ح : ح = ح - ح - ح$  مهما كان م و د

أولا - اذا كان م = ب - د و د = ح - ب فيكون  
 $ح - ب : ح - ب = ح - ب : ح - ب$

وذلك لأن  $ح - ب = ح - ب$  و  $ح - ب = ح - ب$  فيكون  
 $ح - ب : ح - ب = ح - ب : ح - ب$  وهو المراد

تطبيق  $ح - ب : ح - ب = ح - ب : ح - ب$  و  $ح - ب = ح - ب$

ثانيا - اذا كان م = ب و د = ح فيكون  
 $ح : ح = ح : ح$

وذلك لأن  $ح : ح = ح : ح$  و  $ح : ح = ح : ح$  فيكون  
 $ح : ح = ح : ح$  نرفع الطرفين لدرجة و

$(ح : ح) = (ح : ح)$  أو

» »  $ح - ب = ح - ب$  نأخذ جذر الطرفين بدرجة و

$ح : ح = ح : ح$  أو

» »  $ح - ب = ح - ب$  وهو المراد

وإذا اختلف المقامان فيجنس الكسران ابتداء في الاستدلال على صحة القاعدة

$$\text{تطبيق } \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} \text{ و } \frac{2}{5} : \frac{1}{5} = \frac{2}{5} : \frac{1}{5}$$

ثالثا - إذا كان م = ٥، و - ب يكون ح : ب - ح = ٥ - ح = ٥ - ح

وذلك لان ح : ب = ١ : ٥، و - ح = ٥ - ح فيكون

$$\text{ح : ب} = \frac{1}{5} : 1 = ٥ - ح = ٥ - ح$$

$$\text{تطبيق } \text{ح : ب} = ٥ - ح = ٥ - ح$$

وقس على هذا إذا كانت إحدى الكيتين ذات أس موجب أو سالب أو كسرى و الأخرى مخالفة لها في الأس

### تمرين ٤٣

المطلوب إجراء عمليات القسمة الآتية

|  |   |
|--|---|
| $\frac{2}{5} - \text{ب} : \frac{3}{5} - \text{ب}$ (٩)    | (١) $٣ - \text{ب} : ٥ - \text{ب}$                     |
| $\frac{2}{5} - \text{ح} : \frac{3}{4} - \text{ح}$ (١٠)   | (٢) $٤ - \text{ح} : ٣ - \text{ح}$                     |
| $٣ - \text{د} : ٢ - \text{د}$ (١١)                       | (٣) $٥ - \text{د} : د$                                |
| $٢ - \text{هـ} : ٣ - \text{هـ}$ (١٢)                     | (٤) $٣ - \text{ب} : \text{ب}$                         |
| $\frac{1}{4} - \text{و} : \frac{1}{2} - \text{و}$ (١٣)   | (٥) $٢ - \text{ح} : ٢ - \text{ح}$                     |
| $\frac{1}{5} - \text{ز} : \frac{1}{3} - \text{ز}$ (١٤)   | (٦) $\frac{2}{5} - \text{ب} : \frac{3}{5} - \text{ب}$ |
| $\frac{2}{5} - \text{هـ} : \frac{2}{5} - \text{هـ}$ (١٥) | (٧) $\frac{1}{3} - \text{ح} : \frac{2}{4} - \text{ح}$ |
|  | (٨) $\frac{1}{6} - \text{د} : \frac{2}{5} - \text{د}$ |

١٧٢ الرفع الى القوة  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{C}^{\mathcal{C}^2}$  مهما كان  $\mathcal{M}$  و  $\mathcal{D}$   
 أولا - اذا كان  $\mathcal{M} = \mathcal{B} - \mathcal{D}$  ويكون  
 $(\mathcal{B} - \mathcal{D})^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{B} - \mathcal{D}$

وذلك لان  $\mathcal{B} - \mathcal{D} = \frac{1}{\mathcal{C}^2}$  فيكون

$(\mathcal{B} - \mathcal{D})^{\mathcal{C}^2} = \frac{1}{\mathcal{C}^2} \times \frac{1}{\mathcal{C}^2} \times \frac{1}{\mathcal{C}^2} \dots$  مرات بقدر  $\mathcal{D}$  اى

$(\mathcal{B} - \mathcal{D})^{\mathcal{C}^2} = \frac{1}{\mathcal{B} - \mathcal{D}} = \mathcal{B} - \mathcal{D}$

تطبيق  $(\mathcal{C}^2 - \mathcal{C})^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{C}^2 - \mathcal{C}$

ثانيا - اذا كان  $\mathcal{M} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}}$  و  $\mathcal{D} = \mathcal{F}$  فيكون  
 $(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}})^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{F} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}}$

وذلك لان  $(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}})^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{F} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}} \times \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}} \times \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}} \dots$  مرات

يتقدر  $\mathcal{F}$  فيكون  $(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}})^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{F} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{D}}$

تطبيق  $(\frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}^2} = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{C}}$

ثالثا - اذا كان  $\mathcal{M} = \mathcal{C}$  و  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$  يكون  $(\mathcal{C})^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{C}$

وذلك لان  $\mathcal{C} = 1$  فرفعه الى أى قوة يساوى واحدا او  $\mathcal{C}$

تطبيق  $(\mathcal{C})^{\mathcal{C}^2} = \mathcal{C}$

رابعاً - اذا كان  $m = n$  و  $d = \frac{h}{n}$  يكون

$$\frac{h}{n} = \frac{h}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$$

وذلك لان  $\frac{h}{n} = \frac{h}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$  او

$$\frac{h}{n} = \frac{h}{n} \left( \frac{n}{n} \right) \text{ وبموجب (١٦١) يكون}$$

$$\frac{h}{n} = \frac{h}{n} \left( \frac{n}{n} \right) \text{ وهو المراد}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right) \text{ تطبيق}$$

تمرين ٤٤

المطلوب بيان مقادير الكميات الآتية

|   |  |
|---|--|
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٨)  | $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (١) |
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٩)  | $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٢) |
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (١٠) | $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٣) |
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (١١) | $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٤) |
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (١٢) | $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٥) |
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (١٣) | $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٦) |
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (١٤) | $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (٧) |
| $\frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)$ (١٥) |  |

(١٧٣) الجذر  $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a} = \frac{f}{a}$  مهما كان  $a, f$   
 أولا - اذا كان  $a = -b, f = 0$  ويكون  $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a} = \frac{0}{-b} = 0$   
 لأنه اذا رفع المقدار  $\frac{f}{a}$  الى درجة  $3$  (بموجب ١٧٢) يكون  
 $\left(\frac{f}{a}\right)^3 = \frac{f^3}{a^3} = \frac{0^3}{(-b)^3} = 0$  و نأخذ جذر الطرفين بدرجة ٣ و  
 $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a}$  وهو المراد  
 تطبيق  $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a}$   
 ثانيا - اذا كان  $a = \frac{b}{c}, f = 0$  و يكون  
 $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a} = \frac{0}{\frac{b}{c}} = 0$   
 وذلك لأنه اذا رفع المقدار  $\frac{f}{a}$  الى درجة ٣ (بموجب ١٧٢)  
 ينتج  $\left(\frac{f}{a}\right)^3 = \frac{f^3}{a^3} = \frac{0^3}{\left(\frac{b}{c}\right)^3} = 0$  و نأخذ جذر الطرفين بدرجة ٣ و  
 فينتج  $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a}$  وهو المراد  
 تطبيق  $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a}$   
 ثالثا - اذا كان  $a = 0, f = 0$  و يكون  $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = \frac{f}{a} = \frac{0}{0}$   
 لأن  $\frac{0}{0} = 1$  و جذره بأي درجة يساوي ١ أي  $\sqrt[3]{\frac{f}{a}} = 1$

## تمرين ٤٥

المطلوب إيجاد مقادير الكميات الآتية

|                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$ (٩)  | $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$ (١) |
| $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$ (١٠) | $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$ (٢) |
| $\frac{3}{5} - \frac{3}{5}$ (١١) | $\frac{3}{5} - \frac{3}{5}$ (٣) |
| $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$ (١٢) | $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$ (٤) |
| $\frac{3}{5} - \frac{5}{5}$ (١٣) | $\frac{3}{5} - \frac{5}{5}$ (٥) |
| $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}$ (١٤) | $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}$ (٦) |
| $\frac{3}{5} - \frac{7}{5}$ (١٥) | $\frac{3}{5} - \frac{7}{5}$ (٧) |
|                                  | $\frac{3}{5} - \frac{8}{5}$ (٨) |

١٧٤ يمكن نقل أى عامل من أحد حدى كسر الى الآخر  
وتغيير اشارة أس هذا العامل

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \quad (\text{مثال ١})$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{وذلك لأن فيكون}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$



$$\frac{٢ هـ}{٥} = \frac{٢}{٣ هـ} \quad (\text{مثال ٢})$$

وذلك لأن  $\frac{١}{هـ} = \frac{٣}{٣ هـ}$  فيكون

$$\frac{٢ هـ}{٥} = \frac{١}{٣ هـ} : \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٣ هـ}$$

$$\frac{٥}{١ هـ} = \frac{٢}{١ هـ} \quad (\text{مثال ٣})$$

وذلك لأن  $\frac{١}{٥} = \frac{١}{٥}$  و  $\frac{١}{١ هـ} = \frac{٢}{٢ هـ}$  فيكون

$$\frac{٥}{١ هـ} = \frac{١}{٥} : \frac{١}{١ هـ} = \frac{٢}{١ هـ}$$

وهذه القاعدة مفيدة في تحويل الكسر الذي في حديه عامل أو عوامل سالبة الى كسر عوامل حديه موجبة

#### تمرين ٤٦

المطلوب تحويل المقادير الآتية الى مقادير مكافئة لها ذات أسس موجبة

|                             |                                |                               |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| $\frac{٢ هـ}{٥} \quad (١١)$ | $\frac{٢ آ}{٣} \quad (٦)$      | $\frac{١}{٣ هـ} \quad (١)$    |
| $\frac{١ هـ}{٥} \quad (١٢)$ | $\frac{٢ هـ}{٤} \quad (٧)$     | $\frac{٥}{٣ هـ} \quad (٢)$    |
| $\frac{٢ هـ}{٥} \quad (١٣)$ | $\frac{٢ هـ}{٣} \quad (٨)$     | $\frac{٢ هـ}{٥} \quad (٣)$    |
| $\frac{٢ هـ}{٥} \quad (١٤)$ | $\frac{٢ هـ}{٥} \quad (٩)$     | $\frac{٥ هـ}{٣ هـ} \quad (٤)$ |
| $\frac{٢ هـ}{٥} \quad (١٥)$ | $\frac{٢ هـ}{١ هـ} \quad (١٠)$ | $\frac{٢ هـ}{٣ هـ} \quad (٥)$ |

١٧٥ بمقتضى القواعد السابقة يمكن اختصار الأوضاع الجبرية التي بها أسس سالبة أو كسرية وتحويلها الى مقادير مكافئة لها ذات أسس موجبة أو صحيحة ونوضح ذلك بالأمثلة الآتية

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} \quad (\text{مثال ١})$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (\text{مثال ٢})$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (\text{مثال ٣})$$

## تمارين ٤٧

ضع المقادير الآتية مختصرة بأسس موجبة

|                                  |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ (٦)  | $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ (١) |
| $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (٧)  | $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (٢)      |
| $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (٨)  | $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ (٣) |
| $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (٩)  | $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (٤)      |
| $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (١٠) | $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (٥)      |

ضع المقادير الآتية مختصرة تحت علامة جذر باس موجبة

$$\frac{1}{3} \sqrt{\quad} : \frac{1}{2} \sqrt{\quad} \quad (16)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\quad}} - 2} \quad (17)$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{27}} \times \sqrt[3]{\frac{2}{27}} \quad (18)$$

$$\sqrt[3]{27 - 2} \sqrt[3]{27 - 2} \quad (19)$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{27}} \times \sqrt[3]{\frac{2}{27}} \quad (20)$$

$$\frac{3}{4} \sqrt{\quad} \quad (11)$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{\quad} \times \frac{1}{2} \sqrt{\quad} \quad (12)$$

$$\frac{1}{5} \sqrt{\quad} : 3 \sqrt{\quad} \quad (13)$$

$$\frac{3}{\frac{3}{4} \sqrt{\quad}} \quad (14)$$

$$\frac{2}{\frac{2}{3} \sqrt{\quad}} \quad (15)$$

ابحث من مقادير الكميات الآتية

$$\frac{2}{5} - \left( \frac{1}{128} \right) \quad (26)$$

$$\frac{1}{7} - \left( \frac{729}{4096} \right) \quad (27)$$

$$\frac{1}{7} - \left( \frac{1}{128} \right) \quad (28)$$

$$4 - 0.1 \quad (29)$$

$$\frac{1}{3} - (0.012) \quad (30)$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{\quad} \quad (21)$$

$$\frac{3}{2} - 81 \quad (22)$$

$$\frac{1}{3} - \left( 3 \frac{3}{8} \right) \quad (23)$$

$$\frac{2}{5} - \left( \frac{32}{3125} \right) \quad (24)$$

$$\frac{3}{4} - \left( \frac{81}{1280} \right) \quad (25)$$

اختصر المقادير الآتية

$$0 \left( \frac{3}{2} \sqrt{\quad} \right) \quad (31)$$

$$0 - \left( \frac{3}{2} \sqrt{\quad} \right) \quad (32)$$

$$3 \left( \frac{3}{2} \sqrt{\quad} \right) - \left( \frac{3}{2} \sqrt{\quad} \right) \quad (33)$$

$$-\frac{1}{2} - \left( \frac{2}{3} \sqrt{\quad} \right) \quad (34)$$

$$\frac{0}{7} - \left( \frac{2}{3} \sqrt{\quad} \right) \quad (35)$$

$$\begin{array}{l|l}
 \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) & \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (3) \\
 (40) & \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \quad (37) \\
 \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \div & \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) : \frac{1}{2} \quad (38) \\
 & \times \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \quad (39) \\
 & \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right)
 \end{array}$$

١٧٦ تنبيه - يمكن تطبيق قواعد ضرب وقسمة الكميات كثيرة الحدود واستخراج جذورها التربيعية على كثيرات الحدود التي تكون أسسها سالبة أو كسرية فترتب هذه الكميات بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف مشترك فيها ثم تجري عليها عمليات مشابهة لما أجرى على الكميات ذات الأسس الموجبة غير أنه يلاحظ في ضرب وقسمة حدودها وفي استخراج جذورها ماسبق الكلام عليه في الحدود ذات الأسس السالبة والكسرية

وعلى الطالب أن يطبق ما ذكر على العمليات التي سنذكرها في التمرين الآتي

تمرين ٤٨

$$(1) \text{ اضرب } 4س^١ - 3س^٢ + 2س^٣ + س^٤ \text{ في } 2س^٢ - 3س^٣$$

$$(2) \text{ اضرب } س^{\frac{1}{2}} + 2س^{\frac{2}{3}} + 3س^{\frac{3}{4}} + 4س^{\frac{4}{5}} \text{ في } س^{\frac{1}{3}} - س^{\frac{2}{5}}$$

$$(٣) \text{ اضرب } ٢ \text{ سنة } \frac{٢}{٥} - ٣ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ٤ + ٥ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ٦ \text{ سنة } \frac{٢}{٥}$$

$$\text{ في } ٣ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ٤ \text{ سنة } \frac{٢}{٥}$$

$$(٤) \text{ اضرب } ٣ - ٧ + ٢ \text{ سنة } \frac{١}{٥} \text{ في } ٣ - ٥ + ٢ \text{ سنة } \frac{١}{٥}$$

$$(٥) \text{ اقسام } ٦ \text{ سنة } \frac{٥}{٥} + ٧ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ٤ \text{ سنة } \frac{١}{٥} + ٣ \text{ سنة } \frac{١}{٥} + ٢ \text{ سنة } \frac{١}{٥}$$

$$(٦) \text{ اقسام } ٦ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ١٣ \text{ سنة } \frac{٢}{٥} + ١٥ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ١٢ \text{ سنة } \frac{٢}{٥} + ٤ \text{ سنة } \frac{١}{٥}$$

$$\text{ في } ٣ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ٢ \text{ سنة } \frac{١}{٥}$$

$$(٧) \text{ اقسام } ٦ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ١٧ - ١٠ \text{ سنة } \frac{١}{٥} + ١٦ \text{ سنة } \frac{٢}{٥} - ٥٨ \text{ سنة } \frac{٣}{٥}$$

$$٤٩ \text{ سنة } \frac{٤}{٥} - ٣٠ \text{ سنة } \frac{١}{٥} \text{ على } ٣ \text{ سنة } \frac{١}{٥} - ٤ \text{ سنة } \frac{٢}{٥} + ٥ \text{ سنة } \frac{٣}{٥}$$

ابحث عن الجذور التربيعية للكميات الآتية

$$(٨) \text{ سنة } \frac{٢}{٥} - ٢ \text{ سنة } \frac{٢}{٥} + ٣ \text{ سنة } \frac{٤}{٥} - ٢ \text{ سنة } \frac{١}{٥} + ٧ \text{ سنة } \frac{٢}{٥}$$

$$(٩) \text{ سنة } \frac{٢}{٥} - ١٢ + ١٣ - ١٦ \text{ سنة } \frac{١}{٥} + ١٦ \text{ سنة } \frac{٢}{٥}$$

$$(١٠) \text{ سنة } \frac{٢}{٥} + \sqrt[٥]{٢٤} - ٣١ \text{ سنة } \frac{١}{٥} + \sqrt[٥]{٢٤} + ١٦ \text{ سنة } \frac{٢}{٥}$$

### الجذور الصماء

١٧٧ تمهيد تقدم بكرة (١٥٨) أن كل حد غير مربع كامل يبين جذره بوضعه تحت علامة الجذر ويسمى مقدارا غير جذري أو جذرا أصم وبالتبعية لذلك فكل حد لا تقبل أسس عوامله القسمة على دليل جذره ينبغي أن يبقى تحت علامة الجذر ويسمى أيضا جذرا أصم

وحينئذ فلا حاجة لأن يبقى تحت علامة جذر حدود أو كيات يمكن  
استخراج جذورها الحقيقية

فمثل الكيات  $\sqrt{49}$  و  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  يمكن استخراج جذورها  
وتؤول الى ٧ و ٣ و ٢ و ١

وأما مثل الكيات  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{2}$  التي لا يمكن إيجاد  
مقاديرها الحقيقية تسمى جذورا صماء  
ومما ذكر يستنتج التعريف الآتي

١٧٨ الجذر الاصم هو كية موضوعة تحت علامة جذر ولا يمكن  
استخراج مقدار جذرها الحقيقي

مثل  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{7}$  فانه لا يمكن إيجاد عدد صحيح ولا عدد كسرى  
إذا ضرب في مثله ينتج ٥ وكذا لا يمكن إيجاد مقدار إذا ضرب في مثله  
ينتج ٥

تنبيه - الجذور الصماء الأكثر استعمالا هي الجذور ذات الدرجة  
الثانية (التربيعية)

١٧٩ قد يراد في بعض الاحيان اجراء عمليات على الجذور ولذا  
ينبغي أن نشرح عمليات الجذور وهي وان كانت عامة غير ان ضرورة  
استعمالها يكون في الجذور الصماء

### عمليات الجذور

١٨٠ تعريف - الجذور المتشابهة هي ما اتحدت فيها الكيات  
التي تحت علامة الجذر واتحدت درجة أدلتها

فالجذور  $\sqrt{3}$  هـ ،  $\sqrt{4}$  س ، و  $-\sqrt{5}$  س هي جذور متشابهة  
 ١٨١ قاعدة - الجمع أو طرح جذور متشابهة تجمع أو تطرح  
 مكرراتها ثم يوضع الناتج مكررا لاحد الجذور

فمجموع الجذرين  $\sqrt{5}$  هـ ،  $\sqrt{6}$  س هو  $\sqrt{11}$  هـ  
 ومجموع الجذرين  $\sqrt{9}$  هـ ،  $-\sqrt{14}$  هـ هو  $-\sqrt{5}$  هـ  
 وباقي طرح  $\sqrt{5}$  هـ من  $\sqrt{8}$  هـ هو  $\sqrt{3}$  هـ  
 وباقي طرح  $-\sqrt{5}$  هـ من  $\sqrt{8}$  هـ هو  $\sqrt{13}$  هـ  
 تنبيه - اذا كانت الجذور غير متشابهة فيبين مجموعها أو باقي طرحها  
 بواسطة العلامات

فمجموع الجذرين  $\sqrt{3}$  هـ ،  $\sqrt{7}$  س هو  $\sqrt{3} + \sqrt{7}$  س  
 وباقي طرح الاول من الثاني هو  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  س  
 ١٨٢ قاعدة - لضرب جذرين متحدى الدليل يضرب  
 المكران ويؤخذ جذر حاصل ضربهما بالدليل الاصلى  
 فعلى هذا يكون  $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{35}$  س  
 وذلك لأنه اذا فرض أن  $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{35}$  س ورفع الطرفان  
 الى القوة الثانية ينتج

$(\sqrt{5} \times \sqrt{7})^2 = س^2$  وبموجب نمرة ١٥٢ يكون  
 $٥ \times ٧ = س^2$  وبأخذ جذر الطرفين يحدث  
 $٥ \times \sqrt{7} = س$  وباستعاضة س بمقدارها ينتج  
 $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{35}$  س

$$\frac{2}{3} \gamma_3 = \frac{2}{3} \gamma_{12} = \frac{2}{3} \gamma_4 : \frac{2}{3} \gamma_{12} \text{ also}$$

١٢ ٦٧ = ٦٧ ٤ × سـ وبتربيع طرفي هذه المتساوية يحدث

$$s_2 = \frac{144}{517} \text{ أو } \cdot$$

$\frac{12}{5} = s$  و اذا وضع بدلا عن  $s$  مقداره ينتج

$$\frac{2}{5} \sqrt{12} = \frac{2}{5} \sqrt{4 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot 2 \sqrt{3} = \frac{4}{5} \sqrt{3}$$

١٨٥ اخراج عامل من تحت علامة الجذر

أولاً - إذا احتوى جذر تربيعي أصم على عوامل زوجية يمكن انخراج تلك العوامل من تحت علامة الجذر باستخراج جذرها ثم ضرب الناتج في الكمية الباقية موضوعة تحت علامة الجذر



مثلا  $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$  وذلك لأن الكمية  $\sqrt[4]{2}$  هي حاصل ضرب  $\sqrt[4]{2}$  في  $\sqrt[4]{2}$  وبمقتضى نمرة ١٨٢ يكون

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$$

ثانيا - اذا احتوى الجذر الأصم على عوامل ذات أسس فردية (غير الواحد) يحلل الى عاملين أحدهما مربع كامل ويؤخذ جذره ثم يضرب الناتج في الكمية الباقية موضوعة تحت علامة الجذر

$$\text{مثلا } \sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{2 \times 9} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6}$$

٣  $\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6}$  ويستدل على ذلك كما في المثال السابق

تنبيه - تسمى هذه العملية باختصار الجذر الأصم

١٨٦ ادخال مكرر تحت علامة الجذر - لذلك يربع هذا المكرر ويضرب في الكمية التي تحت علامة الجذر ثم يوضع الناتج تحت علامة الجذر

$$\text{مثلا } \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$$

$$\text{لأن } \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$$

تمارين ٤٩

اختصر الاوضاع الجبرية الآتية

$$(1) \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}$$

$$(2) \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}$$

$$(3) (\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}) - \sqrt[4]{2}$$

$$(4) (\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}) + \sqrt[4]{2}$$



ثانياً - اذا كان مقام كسركية ذات حدّين أحدهما أو كلاهما جذراً أصمّ فيمكن حذف الجذر الأصم بضرب حدّي الكسر في كمية مثلها مع تغيير علامة الحد الثاني

$$\frac{(\sqrt{7} - 5)^2}{(\sqrt{7} - 5)(\sqrt{7} + 5)} = \frac{^2}{\sqrt{7} + 5}$$

$$\frac{\sqrt{7}^2 - 5^2}{5 - \sqrt{7}} =$$

$$\frac{(\sqrt{7} + 5\sqrt{7})^2}{(\sqrt{7} + 5\sqrt{7})(\sqrt{7} - 5\sqrt{7})} = \frac{^2}{\sqrt{7} - 5\sqrt{7}}$$

$$\frac{\sqrt{7}^2 + 5\sqrt{7}^2}{5 - \sqrt{7}} =$$

تنبيه - اذا كان المقام كمية ذات ثلاثة حدود فيمكن أن نعتبر حدّين منها كأنهما حد واحد وحينئذ يكون المقام كأنه كمية ذات حدّين نجري عليه ما سبق

١٨٨ قاعدة - اذا اشتغلت معادلة على جذر تربيعي يمكن ازالته منها ولذلك يوضع الجذر بانفراده في أحد الطرفين وباقي الحدود في الطرف الآخر ثم يربع الطرفان

ففي المعادلة  $\sqrt{7} + 5 = 2$  نحول  $5$  الى الطرف الثاني فيحدث

$$\sqrt{7} = 2 - 5$$

ثم نربع الطرفين فيحدث

$$\sqrt{7}^2 = 2^2 - 5^2$$

واذا احتوت المعادلة على جذرين تربيعيين فقد يمكن ازالتهما  
ففي المعادلة  $\sqrt{s} + \sqrt{s-6} = \sqrt{s+2}$  نحول  $\sqrt{s}$  الى  
الطرف الثاني فيحدث

$$\sqrt{s} - \sqrt{s-6} = \sqrt{s+2} \quad \text{ثم نربع الطرفين}$$

$$\sqrt{s} - \sqrt{s-6} = \sqrt{s+2} \quad \text{فيحدث}$$

وبالاختصار والتحويل يحدث

$$2\sqrt{s} - \sqrt{s-6} = \sqrt{s+2} \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$4s - 2\sqrt{s(s-6)} + s - 6 = s + 2 \quad \text{يحدث}$$

تمرين ٥٠

المطلوب ازالة الجذور من مقامات الكسور الآتية

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| $\frac{37-373+8}{37+373}$ (٨)       | $\frac{3}{372} \text{ و } \frac{0}{37}$ (١) |
| $\frac{37-6}{37-6}$ (٩)             | $\frac{3}{372} \text{ و } \frac{3}{37}$ (٢) |
| $\frac{37-37+6}{37-37}$ (١٠)        | $\frac{37+37}{37}$ (٣)                      |
| $\frac{37}{37-37}$ (١١)             | $\frac{37-3}{372}$ (٤)                      |
| $\frac{373-1877}{37+1272-376}$ (١٢) | $\frac{372-7}{374}$ (٥)                     |
| $\frac{1}{37-37+37}$ (١٣)           | $\frac{372-8}{378-3}$ (٦)                   |
| $\frac{37-37+4}{37+37-3}$ (١٤)      | $\frac{378+4}{372+0}$ (٧)                   |

المطلوب ازالة الجذور من المعادلات الاتية وحلها

$$٣ = \sqrt[٣]{٧ - ٤\sqrt[٣]{٧}} \quad (١٥)$$

$$٥ = \sqrt[٣]{٧ - ٤\sqrt[٣]{٧}} \quad (١٦)$$

$$٧ = \sqrt[٣]{٧ - ٤\sqrt[٣]{٧}} - ١٣ \quad (١٧)$$

$$٥ - \sqrt[٣]{٧} = \sqrt[٣]{٧} \quad (١٨)$$

$$٥ = \sqrt[٣]{٧} + \sqrt[٣]{٧} \quad (١٩)$$

$$\sqrt[٣]{٧} = ٢ - \sqrt[٣]{٣٣ + ٨\sqrt[٣]{٧}} \quad (٢٠)$$

$$٠ = \sqrt[٣]{١٢ - ٨\sqrt[٣]{٧}} - \sqrt[٣]{٧} \quad (٢١)$$

$$\sqrt[٣]{٧} = \sqrt[٣]{٩ + ٢٥\sqrt[٣]{٧}} - ١٠ \quad (٢٢)$$

$$٥ + \sqrt[٣]{٧} = \sqrt[٣]{٥ + ٥\sqrt[٣]{٧}} \quad (٢٣)$$

$$٥ = \sqrt[٣]{٥} - \sqrt[٣]{٥} \quad (٢٤)$$

### الكيات التخيلية

١٨٩ من المعلوم أن مربع أى عدد موجب او سالب لا يكون الا موجبا وحينئذ فكل كمية سالبة لا يكون لها جذر تربيعى مطلقا ومتى وضعت تحت علامة الجذر تسمى كمية تخيلية

مثلا  $\sqrt{-٢٥}$  و  $\sqrt{-٢}$  تسمى كمية تخيلية اذ لا يوجد كمية موجبة ولا سالبة اذا رفعت الى القوة الثانية ينتج  $-٢٥$  أو  $-٢$

١٩٠ كل كمية تخيلية يمكن تحليلها الى عاملين أحدهما جذر

هذه الكمية مأخوذة موجبة والثانى  $\sqrt{-١}$

$$\overline{1-2} > = \overline{1-2} \times \overline{2} = \overline{2-2}$$

و  $\overline{2-2} = \overline{2} \times \overline{1-2}$  وحيث انه يمكن إيجاد  $\overline{2}$  بمقدار تقريبي فاذا رمز له بحرف  $\overline{2}$  يكون  $\overline{2-2} = \overline{2} \times \overline{1-2}$  فالعامل التخيلي الوحيد هو  $\overline{1-2}$

### عمليات الكميات التخيلية

١٩١ قبل الكلام على عمليات الكميات التخيلية نبحث عن القوى المختلفة للعامل التخيلي  $\overline{1-2}$  فنجد

$$\overline{1-2} = {}^1(\overline{1-2}) \quad \text{أولا}$$

$$\overline{1-2} = \overline{1-2} \times \overline{1-2} = {}^2(\overline{1-2}) \quad \text{ثانيا}$$

$$\overline{1-2} = \overline{1-2} \times {}^2(\overline{1-2}) = {}^3(\overline{1-2}) \quad \text{ثالثا}$$

$$= {}^2(\overline{1-2}) \times {}^2(\overline{1-2}) = {}^4(\overline{1-2}) \quad \text{رابعا}$$

$$1 = 1 - \times 1 -$$

$$\overline{1-2} = \overline{1-2} \times {}^4(\overline{1-2}) = {}^0(\overline{1-2}) \quad \text{خامسا}$$

وحيث ان القوة الخامسة هي عين الاولى فبالاستمرار يشاهد أن القوة السادسة عين الثانية وهكذا أعني أن قوى العامل التخيلي  $\overline{1-2}$  تتغير تغيرا دوريا أربعة فأربعة وتأخذ في كل دور الاربعة الصور السابقة

اذا تقرر هذا فيلاحظ في ضرب وقسمة الكميات التخيلية تحليل كل منها الى عاملين كما في (١٩٠) واجراء عمليات الضرب على العامل التخيلي  $\sqrt{-1}$  بمقتضى ما ذكر آنفا - أما عمليات جمع وطرح الكميات التخيلية فينطبق عليها قواعد عمليات الجذور الصماء ولنوضح ذلك بالامثلة الآتية

$$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} + \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \quad (\text{مثال ١})$$

$$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} - \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \quad (\text{مثال ٢})$$

$$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \quad (\text{مثال ٣})$$

$$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \quad (\text{مثال ٤})$$

$$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} - \sqrt{-1}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \quad (\text{مثال ٥})$$

$$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \quad (\text{مثال ٦})$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} - \sqrt{-1} \quad (\text{مثال ٧})$$

$$\sqrt{-1} - \sqrt{-1} =$$

وينتج مما تقدم أن حاصل ضرب كميتين تخيليتين هو كمية حقيقية سالبة ( أنظر مثال ٣ ) وحاصل ضرب ثلاث كميات تخيلية هو كمية سالبة تخيلية ( أنظر مثال ٤ )

وخارج قسمة كيتين تخيليتين هو كية حقيقية (أنظر مثال ٥)  
 وخارج قسمة كية تخيلية على كية حقيقية هو كية تخيلية  
 (أنظر مثال ٦) وخارج قسمة كية حقيقية على كية تخيلية هو كية  
 تخيلية (أنظر مثال ٧)

تمرين ٥١

اختصر الكيات الآتية

$$(١) \quad \sqrt{1-77} - \sqrt{1-73} + \sqrt{1-70}$$

$$(٢) \quad \sqrt{5-74} + \sqrt{5-72} + \sqrt{5-70}$$

$$(٣) \quad \sqrt{10-7} - \sqrt{4-78} + \sqrt{17-72}$$

$$(٤) \quad \sqrt{2-72} - \sqrt{32-73} + \sqrt{8-74}$$

$$(٥) \quad \sqrt{25-7} + 1 - \sqrt{25-7} + 12$$

$$(٦) \quad \sqrt{213-7} + \sqrt{2112-7} + 14$$

$$(٧) \quad \sqrt{2-7} \times \sqrt{5-7}$$

$$(٨) \quad \sqrt{2-74} \times \sqrt{5-73}$$

$$(٩) \quad \sqrt{2-7} \times \sqrt{25-7} \times \sqrt{2-7}$$

$$(١٠) \quad \sqrt{5-7} \times \sqrt{2-70} \times \sqrt{5-7}$$

$$(١١) \quad \sqrt{25-7} \times \sqrt{25-7}$$

$$(١٢) \quad \sqrt{25-7} : \sqrt{25-7}$$

$$(١٣) \quad 22 : \sqrt{4-78}$$

$$(١٤) \quad 5 + 2 : \sqrt{2(5+2)-7}$$

$$(١٥) \quad \sqrt{21-7} : 5$$

$$(١٦) \quad \sqrt{2(5-2)-7} : 5-2$$



## اللوغاريتم

١٩٢ تعريف لوغاريتم أى عدد بالنسبة لعدد ثابت يسمى قاعدة هو الأس الذى ترفع اليه هذه القاعدة ليكون الناتج مساويا للعدد الاصلى

مثلا معلوم أن  $4^3 = 64$  فيكون لوغاريتم ٦٤ بالنسبة للقاعدة ٤ هو ٣

وكذا معلوم أن  $8^2 = 64$  » » ٦٤ » » ٨ » ٢

ومعلوم أن  $3^4 = 81$  » » ٨١ » » ٨١ » ٣ » ٤

وكذا معلوم أن  $9^2 = 81$  » » ٨١ » » ٨١ » ٩ » ٢

وعلى العموم اذا كان  $x = y$  فيكون لوغاريتم  $y$  بالنسبة

للقاعدة  $x$  هو  $z$

ومن حيث ان  $10^1 = 10$  و  $10^2 = 100$  و  $10^3 = 1000$  و

$10^4 = 10000$  وهكذا فتكون الأعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ هي

لوغاريتمات الأعداد ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠ و ١٠٠٠٠ الخ بالنسبة

للقاعدة ١٠

فمن الأمثلة السابقة يتبين اختلاف المقادير التى يمكن اعتبارها

لوغاريتمات لعدد واحد باختلاف العدد الثابت الذى يتخذ قاعدة

وتكتب معادلة اللوغاريتم عادة بأحد الصورتين

$$b^x = c \text{ أو } \log_b c = x$$

واللوغاريتمات التى أساسها ١٠ أى التى فيها القاعدة  $b = 10$  تسمى

باللوغاريتمات المعتادة وهى المستعملة ولا لزوم لبيان القاعدة فيها وعلى هذا

اذا كتب  $\log c = x$  دل ذلك على لوغاريتم  $c$  بالنسبة للقاعدة ١٠ هو  $x$

## . خواص اللوغاريتمات

١٩٣ نظرية ١ - لوغاريتم الواحد يساوى صفرا

البرهان - معلوم أن  $\log 1 = 0$  ومن حيث ان هذه المعادلة صحيحة مهما كان مقدار  $x$  فحينئذ يكون لوغاريتم الواحد يساوى صفرا مهما كانت القاعدة

١٩٤ نظرية ٢ - لوغاريتم القاعدة يساوى واحدا

البرهان - معلوم أن  $\log a = 1$  ومن حيث ان هذه المعادلة صحيحة مهما كان مقدار  $x$  فيتضح أن لوغاريتم القاعدة يساوى واحدا

١٩٥ نظرية ٣ - لوغاريتم حاصل ضرب عددين يساوى مجموع لوغاريتميهما

مثلا اذا فرض أن  $\log 2 = 0.3010$  و  $\log 3 = 0.4771$  يكون  $\log 6 = 0.7781$

البرهان - يؤخذ من الفرض أن

$\log 2 = 0.3010$  و  $\log 3 = 0.4771$  فبضرب احدى هاتين المتساويتين في الأخرى ينتج

$\log 2 \times \log 3 = 0.3010 \times 0.4771$  ومن هذه المتساوية يؤخذ أن

$\log 6 = 0.7781$  وهو المطلوب

مثلا  $\log 30 = 1.4771$  و  $\log 7 = 0.8451$

و يمثل هذا يستدل على أن لوغاريتم حاصل ضرب عدة عوامل  
يساوى مجموع لوغاريتماتها

$$\text{مثلا لو } (ا \times ب \times ج) = \text{لو ا} + \text{لو ب} + \text{لو ج}$$

**١٩٦** نظرية ٤ - لوغاريتم خارج القسمة يساوى لوغاريتم  
المقسوم ناقصا لوغاريتم المقسوم عليه

$$\text{مثلا اذا فرض أن } \text{لو ا} = ج \text{ و } \text{لو ب} = هـ \text{ و يكون}$$

$$\text{لو } \frac{ا}{ب} = ج - هـ$$

البرهان - يؤخذ من الفرض أن

$$ج = \text{لو ا} \text{ و } هـ = \text{لو ب} \text{ و بقسمة المتساوية الاولى على الثانية ينتج}$$

$$\frac{ج}{هـ} = \frac{\text{لو ا}}{\text{لو ب}} = \text{لو } \frac{ا}{ب} \text{ ومن هذه المعادلة يؤخذ أن}$$

$$\text{لو } \frac{ا}{ب} = ج - هـ \text{ و وهو المراد}$$

يؤخذ من هذه النظرية أن لوغاريتم الكسر الاعتيادى يساوى  
لوغاريتم بسطه ناقصا لوغاريتم مقامه

**١٩٧** نظرية ٥ - لوغاريتم أى عدد مرفوع الى قوة ما (صحيحة  
او كسرية) يساوى لوغاريتم العدد مضروبا في درجة القوة

$$\text{مثلا اذا فرض أن } \text{لو ا} = ج \text{ يكون } \text{لو } ا^ب = ج \times ب$$

البرهان - يؤخذ من الفرض أن  $ج = \text{لو ا}$  و يرفع الطرفين الى

$$\text{درجة } ب \text{ ينتج } ج \times ب = \text{لو } ا^ب$$

ومن هذه المتساوية يؤخذ أن  $\frac{1}{\text{لو}} = \frac{2}{\text{لو}} = \frac{3}{\text{لو}}$   
وبمثل هذا يبرهن على الحالة التي تكون فيها  $\frac{1}{\text{لو}}$  كسرا وليكن  $\frac{1}{\text{لو}}$

$$\text{مثلا } \frac{1}{\text{لو}} = \frac{1}{\text{لو}} = \frac{1}{\text{لو}}$$

ومن حيث أن  $\frac{1}{\text{لو}}$  هو عبارة عن  $\frac{1}{\text{لو}}$  فيمكن أن يقال ان  
لوغاريتم جذر أى كمية بدليل ما يساوى لوغاريتم هذه الكمية مقسوما  
على دليل الجذر

### اللوغاريتمات المعتادة

١٩٨ اللوغاريتمات المعتادة هي التي يكون أساسها ١٠ وتبين

$$\text{بالمعادلة } 10^x = \text{أو } \text{لو } x = \text{س}$$

ومن المعادلة  $10^x = \text{س}$  يعلم أن اللوغاريتمات المعتادة لا تكون  
كلها أعدادا صحيحة ولا تكون دائما موجبة

$$\text{مثلا من حيث أن } 10^2 < 728 < 10^3$$

فيكون لوغاريتم ٧٢٨ أكبر من ٢ وأقل من ٣ أى لو ٧٢٨ = ٢ +

$$\text{كسر ومن حيث أن } 10^{-1} < 0.4 < 10^{-2} \text{ فيكون}$$

$$\text{لو } 0.4 \text{ أكبر من } -2 \text{ وأقل من } -1$$

$$\text{أعني لو } 0.4 = -2 + \text{كسر}$$

ويشاهد أن اللوغاريتم يتركب من عدد صحيح وكسر فالعدد الصحيح  
من اللوغاريتم يسمى بالعدد البياني

١٩٩ لمعرفة العدد البياني من لوغاريتم<sup>٢</sup> أى عدد يقال حيث ان العدد المركب من آحاد وعشرات محصور بين ١٠ و ١٠<sup>١</sup> فيكون لوغاريتمه محصورا بين ١ , ٢ أى انه واحد وكسر

والعدد المركب من آحاد وعشرات ومئات محصور بين ١٠<sup>٢</sup> و ١٠<sup>٣</sup> فيكون لوغاريتمه محصورا بين ٢ و ٣ أى انه ٢ وكسر

وعلى العموم العدد  $n$  المركب من أرقام عددها  $d$  يكون محصورا بين  $١٠^{d-1}$  و  $١٠^d$  أى لو  $n = (d-1) + \text{كسر}$

أعني أن العدد البياني من اللوغاريتم هو  $d - ١$  وهو أقل بواحد من عدد أرقام العدد

ومن هنا تستنتج القاعدة الآتية

قاعدة - العدد البياني من لوغاريتم أى عدد صحيح يساوى وحدات بقدر عدد أرقامه ناقصا واحدا

(مثلا) العدد البياني من لوغاريتم ٣٤٦٧٥ هو ٤ والعدد البياني من لوغاريتم ٨٣٤٦٧٥ هو ٢

ومن حيث أن  $١٠ = ١٠$  و  $١٠ = ١٠$  فكل عدد أكبر من الواحد يكون لوغاريتمه أكبر من الصفر أى موجبا وكل عدد أقل من ١٠ لا يوجد في لوغاريتمه عدد بياني

٢٠٠ كل عدد أقل من الواحد يكون العدد البياني من لوغاريتمه سالبا ولا يحاده يقال

الكسر الاعشارى الذى بين اول رقم معنى منه والشرطة صفر  
مثل ٠,٠٥٢٨ هو أكبر من ٠,١ وأصغر من ٠,١ أى محصور بين  
 $\frac{1}{10}$  و  $\frac{2}{10}$

والكسر الاعشارى الذى بين اول رقم معنى منه والشرطة صفران  
مثل ٠,٠٠٥٢٨ هو أكبر من ٠,٠٠١ وأقل من ٠,٠١ أى  
محصور بين  $\frac{3}{10}$  و  $\frac{2}{10}$

وعلى العموم فالكسر الاعشارى الذى بين اول رقم معنى منه  
والشرطة أصفار عددها  $\mathfrak{D}$  هو أكبر من  $\frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$  وأصغر من  $\frac{1}{10}$   
فاذا فرض أن  $\mathfrak{K}$  هو كسر اعشارى بين اول رقم معنى منه  
والشرطة أصفار عددها  $\mathfrak{D}$  تكون

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \text{كسر}$$

$$\text{لـ } \mathfrak{K} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \text{كسر}$$

وحينئذ تستلج القاعدة الآتية

قاعدة - العدد البيانى من لوغار يتم عدد أقل من الواحد هو سالب  
ويساوى وحدات بقدر عدد الاصفار التى بعد الشرطة مباشرة زائدا واحدا  
أو بعبارة أخرى هو عدد سالب يستدل عليه برتبة أول رقم  
معنى بعد الشرطة

مثلا العدد البيانى من لوغار يتم العدد ٠,٣٢٥ هو - ٢

والعدد البياني من لوغاريتم العدد  $٠,٠٠٠٥$  هو — ٤  
وتوضع علامة — فوق العدد البياني السالب فلوغاريتم  $٠,٠٠٥$   
يبين هكذا ( كسر  $\bar{٣}$  )

٣٠١ الجزء الاعشارى من لوغاريتمات الاعداد المركبة من  
أرقام معنوية واحدة يكون متحدا فيها

مثلا الجزء الاعشارى من لوغاريتمات الاعداد  $٤٨$  و  $٤٨٠$   
و  $٤٨٠٠$  و  $٠,٤٨$  و  $٠,٠٤٨$  و  $٠,٠٠٤٨$  و  $٠,٠٠٠٤٨$  يكون متحدا  
ولوغاريتمات هذه الاعداد لا يفترق بعضها عن بعض الا في العدد البياني  
وذلك لان كل عدد من مركبين من أرقام معنوية متحدة بترتيب  
واحد يكون أحدهما مساويا للآخر مضروبا في عدد  $١٠$  مرفوعة الى  
قوة درجتها موجبة أو سالبة

(مثلا) حيث ان  $٤٨٠٠ = ٤٨ \times ١٠٠$  فيكون

لو  $٤٨٠٠ =$  لو  $٤٨ +$  لو  $١٠٠ = ٤٨ + ٢$  ( كما في ١٩٥ )

وان  $٠,٠٠٠٤٨ = ٤٨ \times ١٠^{-٥}$  فيكون

لو  $٠,٠٠٠٤٨ =$  لو  $٤٨ - ٥$  ( كما في ١٩٦ )

أعني أن اللوغاريتمات يختلف بعضها عن بعض في العدد البياني  
فقط أما الاجزاء الاعشارية فهي متحدة

والاعداد البيانية من لوغاريتمات الاعداد السابقة هي على التوالى

١ و ٢ و ٣ و — ١ و — ٢ و — ٣ و — ٤

٣٠٢ تقسم أن لوغاريتم خارج القسمة يساوى لوغاريتم المقسوم ناقصا لوغاريتم المقسوم عليه فإذا كان المقسوم أقل من المقسوم عليه كان لوغاريتم خارج القسمة سالبا

وكل لوغاريتم سالب يمكن تحويله الى لوغاريتم يكون عدده اللىالى سالباً والجزء الاعشارى موجبا ويكتفى فى هذا أن يضم اليه واحد ويطرح منه واحد

مثلا لتحويل اللوغاريتم  $3,69897$  الذى كله سالب الى لوغاريتم يكون عدده اللىالى فقط هو السالب نجرى العمل هكذا

$$3,69897 - = 3 - 0,69897 = 1 + 0,69897$$

$$3 - 0,30103 = 4 - 0,30103 = 4,69897$$

وبما ذكر تستنتج القاعدة الآتية

قاعدة - لتحويل لوغاريتم سالب الى لوغاريتم يكون جزؤه الاعشارى موجبا وعدده اللىالى سالباً يكتفى أن يطرح الجزء الاعشارى من واحد صحيح ويزاد العدد اللىالى واحدا ويعتبر العدد اللىالى سالباً

٣٠٣ قد عملت جداول للوغاريتمات أساسها ١٠ ذات سبعة أرقام اعشارية وذات خمسة أرقام اعشارية وأربعة أرقام من ١ الى ١٠٠٠٠ انما لم يكتب فى تلك الجداول الاعداد اللىالية وقد اكتفى بكتابة الجزء الاعشارى فقط وبموجب ما تقدم من القواعد يمكن الاستدلال على مقدار العدد اللىالى سواء كان موجبا أو سالبا



ومما ينبغي ملاحظته هو أن الجداول المذكورة لا تشمل  
الاعلى أجزاء اعشارية موجبة اذ تقدم ان اللوغاريتمات السالبة  
يمكن تحويلها الى لوغاريتمات أجزاء الاعشارية موجبة واعدادها  
البيانية سالبة

ولكل جدول من الجداول المذكورة طريقة في استعماله فيجب  
عند استعمال جدول منها ارشاد الطلبة الى كيفية استعماله  
وقد بينا كيفية استعمال الجدول اللوغاريتمى ذى الخمسة ارقام  
الاعشارية فى كتابنا (الدرر البية فى الاصول الحسابية)

٢٠٤ تغيير قاعدة اللوغاريتم (العدد الثابت الذى يرفع الى قوة)  
لتحويل لوغاريتم عدد من قاعدة مثل  $\alpha$  الى قاعدة أخرى مثل  $\beta$   
نفرض أن العدد هو  $\alpha$  وان لوغاريتمه بالنسبة لقاعدة  $\alpha$  معلوم ونفرض  
أن لوغاريتمه بالنسبة لقاعدة  $\beta$  هو  $\beta$  فيكون  
ليو  $\alpha = \beta$  أى  $\alpha = \beta$  ويأخذ لوغاريتمى الطرفين  
بالنسبة للقاعدة المعلوم  $\alpha$  يكون

$$\alpha \log \alpha = \beta \log \beta \text{ وحيث يكون}$$

$$\alpha = \beta \log \alpha \times \frac{1}{\log \beta} \quad (1)$$

أعنى أن لوغاريتم العدد  $\alpha$  بالنسبة لقاعدة  $\beta$  يساوى لوغاريتمه  
بالنسبة لقاعدة  $\alpha$  مضروباً فى عكس لوغاريتم القاعدة  $\beta$  نفسها  
بالنسبة لقاعدة  $\alpha$

تنبيه - اذا وضع في المعادلة (١) العدد  $\delta$  بدلا عن  $\epsilon$  وبدلا عن  $\delta$  ما ساواه ينتج

$$\text{لـ} \delta = \text{لـ} \epsilon \times \frac{\text{لـ} \delta}{\text{لـ} \epsilon} = \frac{\text{لـ} \delta}{\text{لـ} \epsilon} \quad (١٩٤)$$

وحينئذ يكون  $\text{لـ} \delta \times \text{لـ} \epsilon = ١$

### تمرين ٥٢

(١) اذا علم أن لوغاريتم  $\delta = ٠,٦٩٨٩٧$  ولوغاريتم  $\epsilon = ٠,٨٤٥١٠$  ولو  $١٣$

$$= ١,١١٣٩٤ \text{ فما يكون لوغاريتم } \delta \text{ ولوغاريتم } \epsilon$$

(٢) اذا علم أن لوغاريتم  $\delta = ٠,٤٧٧١٢$  ولو  $٥١ = ١,٧٠٧٥٧$  ولو  $١١١$

$$= ٢,٠٤٥٣٢ \text{ فما يكون لوغاريتم } \delta \text{ ولوغاريتم } \epsilon$$

(٣) اذا علم أن لوغاريتم  $\delta = ٠,٦٩٨٩٧$  فما يكون لوغاريتم  $\epsilon$   $٦٢٥٦ \text{ } ١٢٥٦٢٥$

(٤) اذا علم أن لوغاريتم  $\delta = ٠,٣٠١٠٣$  فما يكون لوغاريتم  $\epsilon$   $٦٤٦ \text{ } ١٦٦٨$

(٥) اذا علم أن لوغاريتم  $\delta = ١,٨٠٦١٨$  فما يكون لوغاريتم  $\epsilon$   $٨ \text{ } ١٨٠٦١٨$

(٦) اذا علم أن لوغاريتم  $\delta = ٠,٣٠١٠٣$  ولوغاريتم  $\epsilon = ٠,٧٧٨١٥$  فما يكون

لوغاريتم  $\delta$  ولوغاريتم  $\epsilon$

(٧) اذا علم أن لوغاريتم  $\delta = ٢,٠٢١١٩$  فما يكون لو  $١٠٥٠$  ولو  $١,٠٥٠$

ولو  $٠,٠١٠٥$

(٨) ملققدار العدد البيناني من لوغاريتمات الاعداد  $٨٧٥٢ \text{ } ٤٦٧,٥٦ \text{ } ٣,٨١٢٦$

(٩) ملققدار العدد البيناني من لوغاريتمات الاعداد  $٠,١٦٨٢ \text{ } ٠,٠٠٢٤٦ \text{ } ٠,٠٠٥٦$

(١٠) حول اللوغاريتمات الآتية الى لوغاريتمات مكافئة لها ذات أجزاء اعشارية

موجبة

$$- ١,٦٩٨٩٧ \text{ } ٦ - ٠,٣٠١٠٣ \text{ } ٦ - ٢,٨٥٤١٨$$

## المعادلات ذات الدرجة الثانية

٣٠٥ تعريف - المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هي معادلة محتوية على مجهول واحد وأعظم أس له فيها اثنين

$$\text{مثل } ٥س^٢ + ٢س = ٩٢$$

واذا وجد المجهول في مقام أو تحت علامة جذر يلزم حذفه من المقام أو ازالة الجذر بالطرق السابقة

ففي المعادلة  $٨س^٢ + ٦س = ٩٢$  يلزم حذف المقام فتؤول الى  $٨س^٢ + ٦س = ٩٢$  فهي من الدرجة الثانية

وفي المعادلة  $٧س^٢ + ٣س = ١٤$  يلزم ازالة الجذر فتؤول الى  $٩س^٢ - ٨٥س = ١٩٦$  وهي من الدرجة الثانية أيضا ولا يحكم على درجة المعادلة الا اذا كانت صحيحة وجذرية بالنسبة للمجهول

٣٠٦ الصورة العمومية لمعادلة الدرجة الثانية - كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهول واحد يمكن أن تؤول الى هذه الصورة  $٥س^٢ + ٤س + ٥ = ٠$

لأنه يمكن اختصار الحدود المشتملة على  $س^٢$  الى حد واحد وكذا الحدود المشتملة على  $س$  ثم اعتبار الكمية المعلومة كحد واحد ونجيب لنذكر فكل من الكميات  $٥$  و  $٤$  و  $٥$  الداخلة في المعادلة العمومية السابقة

اما أن يكون حدا واحدا أو كمية كثيرة الحدود موجبة أو سالبة وقد يكون بعضها معدوما

٢٠٧ أنواع معادلة الدرجة الثانية - معادلة الدرجة الثانية  
نوعان تامة وغير تامة فالتامة هي المشتعلة على المجهول بدرجة ثانية  
وبدرجة أولى وعلى كمية معلومة

$$\text{مثل } x^2 + 5x + 6 = 0$$

وغير التامة هي اما أن تشتمل على المجهول بدرجة ثانية وعلى كمية  
معلومة فقط واما أن تشتمل على المجهول بدرجة ثانية وبدرجة  
أولى كذلك

$$\text{مثل } x^2 - 4x = 0 \text{ و } x^2 - 5x + 6 = 0$$

حل معادلات الدرجة الثانية غير التامة

٢٠٨ أولا لحل المعادلة

$x^2 + 5x = 0$  نحول ه الى الطرف الثاني ثم نأخذ جذر  
الطرفين فيحدث  $x^2 + 5x = 0$  أي أن للمعادلة جذرين فاذا  
كان ه سالبا يكون - ه موجبا ويكون الجذران حقيقيين وإذا  
كان ه موجبا يكون - ه سالبا ويكون الجذران تخيليين  
مثلا في المعادلة  $x^2 - 7x = 0$

يكون  $x^2 + 5x = 0$  أي أن للمجهول ه مقدارين  
حقيقيين فاذا رمز لها بحرفي ه و ه<sup>٢</sup> ينتج  $h = 0$  و  $h = 5$   
 $= - 5$  وكل منهما يحقق المعادلة

وفي المعادلة ٣ سر<sup>٢</sup> + ٧٥ = ٠ يكون سر =  $\pm \sqrt{75 - 25}$   
 $\pm \sqrt{50} - 1$  أى أن للجهول مقدارين تخيليين

٢٠٩ ثانيا حل المعادلة سر<sup>٢</sup> - ٤ سر = ٠ نأخذ سر  
 مضروبا مشتركا فيحدث سر ( سر - ٤ ) = ٠ وحيث ان  
 حاصل ضرب سر في ( سر - ٤ ) يساوى صفرا فيلزم أن  
 يكون أحد العاملين أو كلاهما صفرا

فاذا فرض أن سر = ٠ يرى أن مقدار سر هو صفرو به تتحقق المعادلة  
 واذا فرض أن سر = ٤ - سر فيكون سر = ٤ وهو أيضا  
 يحقق المعادلة وحينئذ فيكون للمعادلة جذران فاذا رمز لهما بحرفى  
 سر ٦ سر<sup>٢</sup> ينتج سر<sup>٢</sup> = ٠ ٦ سر<sup>٢</sup> = ٤

مثلا في المعادلة ٣ سر<sup>٢</sup> - ١٥ سر = ٠ يكون  
 سر ( ٣ سر - ١٥ ) = ٠ ومنها يكون سر<sup>٢</sup> = ٥ و سر<sup>٢</sup> = ٥

### تمرين ٥٣

المطلوب حل المعادلات الآتية

|   |  |
|---|--|
| $\frac{سر}{٤} = \frac{١-سر}{سر}$ (٧)        | (١) ٤ سر <sup>٢</sup> - ٦٤ = ٠                             |
| $\frac{١-سر}{٧-سر} = \frac{٧+سر}{١+سر}$ (٨) | (٢) ٥ سر <sup>٢</sup> - ٦٣ = ٢ سر <sup>٢</sup>             |
| ٠ = (١ - سر) ٣ سر (٩)                       | (٣) ٨١ = ٤ سر <sup>٢</sup> - ١٧                            |
| ٠ = ٥ سر <sup>٢</sup> - ٦٠ سر (١٠)          | (٤) ٧ (١ - سر <sup>٢</sup> ) = ١٦٨                         |
| ٢ سر = $\frac{سر}{٢}$ (١١)                  | (٥) $\frac{١٣}{٢} = \frac{١-سر}{١+سر} + \frac{١+سر}{١-سر}$ |
| $\frac{سر}{٢} = \frac{سر}{١٢}$ (١٢)         | (٦) $٠ = \frac{٢١}{٢-سر} - \frac{٣٣}{٢+سر}$                |

$$\begin{array}{l|l}
 (16) \quad 0 = 2s - s^2 & (13) \quad s = \left(\frac{s}{3} + s\right) \\
 \frac{u}{s} = \frac{s}{s+2} & \quad \quad \quad s \\
 \frac{u-s}{s^2} = \frac{s}{s+2} & (14) \quad s = \left(\frac{s}{4} + s\right) \\
 0 = (s - s^2) & \quad \quad \quad s \\
 (19) \quad s = (s - s^2) & \quad \quad \quad s \\
 (20) \quad s = (s - s^2) & (15) \quad 7 = (s + s^2)
 \end{array}$$

### حل مسائل بمعادلات الدرجة الثانية غير التامة

٣١. ولندكر هنا مسائل ترجع الى معادلات الدرجة الثانية غير التامة مع حلها فنقول

المسئلة الاولى - ما هو العدد الذى اذا طرح خمسة من خمس صربعة ينتج ٤٠

الحل نفرض العدد  $s$  وعلى حسب منطوق المسئلة تحدث المعادلة

$$\frac{s^2}{5} - 5 = 40$$

$$s = 15 \pm$$

المسئلة الثانية - رجل عمره خمسة أمثال عمر ابنه ومجموع مربعى عمريهما ١٢٧٤ فما عمر كل منهما

الحل نفرض أن عمر الابن  $s$  فيكون عمر الأب  $5s$  وعلى حسب منطوق المسئلة توجد المعادلة

$$s^2 + 25s^2 = 1274$$

$$s = 7 \pm$$

أعني أن عمر الابن ٧ سنوات ويكون عمر الأب ٣٥ سنة  
أما المقدار السالب فلا يوافق المسئلة

المسئلة الثالثة - ماهو العدد الذي اذا ضرب ثلثه في خمسة أثمانه  
كان الناتج مساويا لعشرة أمثاله

الحل نفرض أن العدد سر فيكون ثلثه  $\frac{سر}{٣}$  وخمسة أثمانه  $\frac{٥سر}{٨}$   
وعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$$\frac{سر}{٣} \times \frac{٥سر}{٨} = ١٠ سر \text{ أو}$$

$$٥ سر^٢ = ٢٤٠ سر \text{ أو}$$

$$سر^٢ = ٤٨ سر \text{ أي}$$

$$سر^٢ - ٤٨ سر = ٠ \text{ وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$سر = ٠ \text{ و } سر = ٤٨$$

المسئلة الرابعة - ماهو العدد الذي نسبة مربعه الى ٦ كنسبته  
الى نصف

الحل نفرض أن العدد سر فعلى حسب المنطوق تحدث  
المعادلة

$$\frac{سر^٢}{٦} = \frac{سر}{٢} \text{ ومنها يكون } سر^٢ = ١٢ سر \text{ أي}$$

$$سر^٢ - ١٢ سر = ٠ \text{ وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$سر = ٠ \text{ و } سر = ١٢ \text{ أعني أن العدد المطلوب هو } ١٢$$

## تمرين ٥٤

- (١) ماهو العدد الذى اذا ضرب ثلثه في ربعه ينتج ١٠٨
- (٢) ماهو العدد الذى نسبته الى ١٨ كنسبة الواحد الى نصف ذلك العدد
- (٣) قطعة أرض مربعة الشكل اذا أضيف لها ١٧٩ متر مربع تصير فدانا فاضلها بالمتر
- (٤) ماهو العدد الذى اذا أضيف عشرة الى مربعه ينتج واحد
- (٥) قطعة من الحرير ثمنها  $\frac{3}{4}$  و ثمن المتر منها يعادل خمس عدد الامتار الدالة على طولها فما ثمن المتر وما مقدار طولها
- (٦) ماهو العدد الذى نسبة مربعه الى ثمانية كنسبة لثلاثة أمثاله الى اثنين
- (٧) ما مقدار طول ضلع الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية بعد معرفة أن الضلع الثانى ينقص من هذا الضلع مترا واحدا وأن الوتر يزيد عنه مترا واحدا
- (٨) مثل شخص من مقدار سنه فقال انه اذا ضرب ثلثا عمره في خمسة كان الناتج مساويا لاربعة أمثاله فما مقدار سنه
- (٩) ماهو العدد الذى ثلاثة أمثاله يساوى تسعة أمثاله
- (١٠) ماهو العدد الذى اذا ضرب في الفرق بينه وبين ١٢ كان الناتج مساويا لثلث مربعة

## حل معادلات الدرجة الثانية التامة

٣١١ تحمل معادلات الدرجة الثانية التامة باحدى الطريقتين الآتيتين الاولى بواسطة التحليل الى عوامل والثانية بواسطة اتمام المربع



## حل المعادلة ذات الدرجة الثانية التامة بواسطة التحليل الى عوامل

٣١٣ حل معادلة ذات درجة ثانية تامة بواسطة التحليل الى  
عوامل نحول جميع حدود المعادلة الى طرف واحد فيقول الطرف الثاني  
الى صفر ثم نحلل الطرف الاول الى عاملين ونفرض على التوالى أن  
كل واحد منهما يساوى صفرا فبذلك تنتج معادلتان بدرجة أولى كل  
منهما تشتمل على المجهول فبحل هاتين المعادلتين ينتج من كل منهما  
مقدار المجهول

ولتأت لذلك بأمثلة فنقول

(مثال ١) حل المعادلة  $x^2 + 5x - 24 = 0$  نحول  $24$  الى  
الطرف الاول فينتج

$x^2 + 5x - 24 = 0$  نحلل الطرف  
الاول الى عامل فينتج

$(x - 3)(x + 8) = 0$  وحيث ان حاصل  
الضرب يساوى صفرا فيلزم أن يكون أحد العاملين أو كلاهما صفرا  
فاذا جعل

$x - 3 = 0$  يكون  $x = 3$  وهو حل للمعادلة  
واذا جعل  $x + 8 = 0$  يكون  $x = -8$  وهو حل أيضا  
للمعادلة

وحيث أن يكون  $x = 3$  أو  $x = -8$

ومن المعتاد أن يرمز لمقدارى المجهول بحرفى  $س$  و  $س'$  ويكتب  
 $س' = ٣$  و  $س = ٨$

(مثال ٢) لحل المعادلة  $س' + ٢ = س$   $٨٥ = ٨٥$  نحول  $٨٥$  للطرف  
 الاول فينتج

$$٣ + س' + ٢ = س - ٨٥ = ٠$$

$$٠ = (٥ - س) (٣ + س' + ١٧)$$

وحيث ان حاصل الضرب صفر فيكون أحد العاملين صفرا فاذا  
 فرض أن  $س - ٥ = ٠$  يكون  $س = ٥$

$$٠ = ١٧ + س' = ٠$$

أعنى أن مقدار المجهول  $س'$  هو  $٥$  أو  $٢$  وإذا رمز لمقدارى  
 المجهول بحرفى  $س'$  و  $س$  يكون  $س' = ٥$  و  $س = ٢$

(مثال ٣) لحل المعادلة  $\frac{٥-س}{١٣-س} = \frac{٧-س}{٧-س}$  نحذف المقامين  
 فيحدث

$$(٥ - س) (٧ - س) = (١٣ - س) (٥ - س)$$

وباجراء الضرب والاختصار ينتج

$$٣ - س' - ٣٩ = ٦٦ + س$$

عالمين فينتج

$$٣ - س' = ١١ - س$$

يساوى صفرا فاذا فرض أن  $٣ - س' = ٠$  يكون  $س' = ٣$

واذا افرض أن سه = ١١ = ٠ يكون سه = ١١ وكلاهما يحقق المعادلة  
أعني أن سه = ٢ أو ١١ وإذا رمز لمقدارى المجهول بحرفي  
سه و سه يكون سه = ٢ و سه = ١١

## تمرين ٥٥

المطلوب حل المعادلات الآتية

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| (١٧) $٢ سه - سه = ١٥ = ٠$   | (١) $سه - ١١ سه + ٣٠ = ٠$       |
| (١٨) $سه - ٤١ سه + ٣٦ = ٠$  | (٢) $سه - سه - ١٠٨ = ٠$         |
| (١٩) $سه - ٦ سه - ٢٠ = ٠$   | (٣) $سه - ٢٤ سه + ٩٥ = ٠$       |
| (٢٠) $سه + ١٥ سه + ٧٧ = ١٠ = ٠$   | (٤) $سه + سه - ٤٢ = ٠$          |
| (٢١) $سه - ١٤٥ سه + ٧٢ = ٠$   | (٥) $سه + سه + ٢٣ سه + ١٠٢ = ٠$ |
| (٢٢) $سه + ١١ سه - ٣ = ٠$   | (٦) $سه - ٢١ سه + ٨٠ = ٠$       |
| (٢٣) $سه - ٩ سه + ٤ = ٠$  | (٧) $سه + ٧ سه - ٧٨ = ٠$        |
| (٢٤) $سه - ٩ سه - ٢ = ٠$  | (٨) $سه - ٢١ سه + ١١٠ = ٠$      |
| (٢٥) $سه + ١١ سه + ٣ = ٠$   | (٩) $سه - سه - ٩٠ = ٠$          |
| (٢٦) $١ = \frac{سه٣ - ١}{سه٣ + ٧} - ١$                                  | (١٠) $سه + ٢ سه + ١ = ٠$        |
| (٢٧) $\frac{سه٣ - ١}{سه٣ - ٣} = \frac{سه٣ + ٣}{سه٣ - ٧}$                | (١١) $سه - ١٩ سه + ٨٤ = ٠$      |
| (٢٨) $\frac{٤}{٥} = \frac{١}{سه٣ - ٩} - \frac{١}{سه٣ - ٣}$              | (١٢) $سه + ٤ سه - ١٦٥ = ٠$      |
| (٢٩) $\frac{١٩}{٣} = \frac{سه٣ - ٢}{سه٣ - ٣} + \frac{سه٣ + ٤}{سه٣ - ٤}$ | (١٣) $سه٣ - ١١ سه + ٦ = ٠$      |
| (٣٠) $\frac{سه٣}{سه٣ + ٦} = \frac{سه٣}{سه٣ - ٢} - \frac{٥}{سه٣ - ٣}$    | (١٤) $سه٣ - سه - ٢ = ٠$         |
| (٣١) $٧ سه + ٦ = ٣ (سه - ٢)$  | (١٥) $سه٣ + ٨ سه + ٤ = ٠$       |
| (٣٢) $سه - ٧ سه = ٢٠$   | (١٦) $سه٣ - ١٥ سه + ٢٨ = ٠$     |
| (٣٣) $٠ = ٩ - سه٣ + ١١ + ٧ سه٣$   | (٣٤) $سه٣ + ١٨ = ١٨$            |

## مسائل على معادلات الدرجة الثانية التامة محولة بطريق التحليل

٣١٣ ولنذكر مسائل تحل بمعادلات الدرجة الثانية التامة بطريق التحليل فنقول

المسألة الاولى - جمعية مكونة من عشرين شخصا رجالا وأولادا تبرعوا بمبلغ ٤٨٠ قرشا لجمعية خيرية فكان نصف هذا المبلغ من الرجال والنصف من الأولاد فإذا علم ان مادفعه كل رجل يزيد عما دفعه كل ولد ١٠ قروش فكم عدد الرجال وكم عدد الأولاد

الحل نرمز لعدد الرجال بحرف  $x$  فيكون عدد الأولاد  $20 - x$  —  
 $x$  ويكون مادفعه كل رجل هو  $\frac{240}{x}$  ومادفعه كل ولد هو  $\frac{240}{20-x}$   
 وحيث ان مادفعه الرجل يزيد عما دفعه الولد ١٠ قروش فتحدث المعادلة  
 $\frac{240}{x} = \frac{240}{20-x} + 10$  وبحذف المقامين والاختصار ينتج

$$x^2 - 240 = 240 - 10x + 20x \quad \text{نحل الطرف الاول الى مضروبين ينتج}$$

$$(x-8)(x-60) = 0$$

وحينئذ يكون  $x = 8$  أو  $x = 60$  والمقدار الاول هو الموافق للمسألة وعليه يكون عدد الرجال ٨ وعدد الأولاد ١٢

ومن الواضح أن المقدار الثاني ٦٠ لا يوافق المسألة لأن المتبرعين كلهم عشرون شخصا

المسألة الثانية - ماهو العدد الذي اذا أضيف الى مربعه كان  
النتائج مساويا الى تسعة أمثال العدد التالى له

الحل نفرض أن العدد  $s$  فيكون العدد التالى له  $s + 1$   
وبناء على منطوق المسألة تحدث المعادلة

$$s^2 + s = 9(s + 1) \text{ وبم حذف الاقواس والاختصار}$$

ينتج

$$s^2 - 8s - 9 = 0 \text{ نحلل الطرف الاوى الى عاملين فينتج}$$

$$(s - 9)(s + 1) = 0$$

ومن هنا يستنتج أن  $s = 9$  أو  $s = -1$  وكلاهما يحقق المسألة

المسألة الثالثة - ماهو العدد الذي اذا أضيف اليه جذره التربيعى  
كان الناتج مساويا الى ١٢

الحل نفرض أن العدد  $s$  فيكون جذره التربيعى  $\sqrt{s}$  وبناء  
على منطوق المسألة تحدث المعادلة

$$s + \sqrt{s} = 12 \text{ وبازالة الجذر ينتج}$$

$$s^2 - 24s + 144 = 0 \text{ نحلل الطرف الاول الى عاملين}$$

فينتج

$$(s - 16)(s - 9) = 0$$

ومن هنا يستنتج أن  $s = 16$  أو  $s = 9$

وكلاهما يحقق المسألة اذ بملاحظة أن  $\sqrt{16} = 4$  واعتبار  
 أن ٤ هو جذر ١٦ يكون  $16 = (4 - 4) + 12$  وبملاحظة  
 أن  $\sqrt{9} = 3$  واعتبار أن ٣ هو جذر ٩ يكون  $9 = 3 + 12$

### تمارين ٥٦

- (١) استأجر اخوة هربة يبلغ ٦٠ مليما وعند الشروع في الركوب حضر اثنان من أصحابهم فركبوا معهم ووزعت الاجرة عليهم جميعا وبذلك نقص ما كان يدفعه كل واحد من الاخوة ثمانية مليمات فكم عدد الاخوة
- (٢) رجل يمكنه أن يقطع ١٠٨ أميال في مدة معينة ووجد أنه يمكنه أن يوفى من تلك المدة ٥ ساعات اذا زاد على سرعته ميلين في الساعة فإسرعته الأصلية
- (٣) ماهو العدد الذي اذا طرح من مربعه ١٣٩ كان الباقي مساويا الى عشرة أمثال زيادة ذلك العدد من اثنين
- (٤) صبي اشترى بيضا بثلاثة قروش فكسر ٣ بيضات في الطريق وبذلك ارتفع ثمن كل ثلاث بيضات مليما من ثمن السوق فكم بيضة اشترها
- (٥) أراد محسن أن يتصلق بـ  $\frac{13}{24}$  على جملة فقراء وبعد تعيين نصيب كل منهم حضر ثلاثة فقراء آخرون فأدخلهم في التقسيم وهذه الوسطة نقص ما كان خصصه لكل واحد  $\frac{1}{5}$  فكم عدد الفقراء الاول
- (٦) مجموع مكسب عشرين متوالين هو  $\frac{13}{24}$  فما هما العددان
- (٧) بلغت مصاريف قضية بين أشخاص متضامين ١٠٠ جنيه فألزموا بدفع هذا المبلغ ولعشر ثلاثة منهم دفع كل من الباقيين ٧٥ جنيهات زيادة عما كان يلزم أن يدفعه فما عدد المتضامين
- (٨) شخص وضع ١٥٠٠٠ جنيه في تجارة مدة سنة ثم أخذ ما وضعه وأرباحه ووضعها في تجارة أخرى مدة سنة رجحت ٩٤٥ جنيها وقدم أن ربحه في هذه السنة يزيد واحدا في المائة من ربح السنة الاولى فكم كان ربح المائة في أول السنة

- (٩) ماهو العدد الذي اذا زيد عليه ١٧ كان الناتج قدر معكوس هذا العدد ٦٠ مرة  
 (١٠) حجرة يمكن تبليطها بمقدار ٢٠٠ بلاطة مربعة الشكل ويمكن تبليطها  
 بمقدار ١٢٨ بلاطة مربعة الشكل من بلاط آخر ضلع كل منها يزيد بوصة  
 واحدة من ضلع النوع الاول فا ضلع البلاطة في الحالة الاولى

### حل المعادلة ذات الدرجة الثانية التامة

#### بطريقة اتمام المربع

٢١٤ للمعادلة التامة ذات الدرجة الثانية صورتان

الاولى أن يكون مكرر المجهول بدرجة ثانية الواحد

الثانية أن يكون مكرره غير الواحد

٢١٥ الصورة الاولى

$s^2 + s + s = h$  . وحلها بطريقة اتمام المربع نحول هـ  
 الى الطرف الثاني فينتج

$$s^2 + s + s = h$$

وبالتأمل للطرف الاول نجد أنه مشتمل على حدين من مربع  
 كمية ذات حدين فيه  $s^2$  مربع الحد الاول و  $s$  ضعف الاول  
 في الثاني فاذن يكون الثاني  $\frac{h}{2}$  فاذا أضيف للطرفين مربعه أى  $\frac{h^2}{4}$

$$s^2 + s + s + \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4} + h$$

ويكون الطرف الاول مربع الكمية  $s + \frac{h}{2}$  فاذا استعويض  
 بها ينتج

$$\begin{aligned} (س + \frac{س}{٢})^2 &= \frac{س^2}{٤} - ه \text{ وبأخذ جذر الطرفين ينتج} \\ س + \frac{س}{٢} &= \sqrt{\frac{س^2}{٤} - ه} \text{ أو} \\ س &= \sqrt{\frac{س^2}{٤} - ه} - \frac{س}{٢} \quad (١) \end{aligned}$$

وهذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانية في الحالة التي يكون مكره الواحد وينطق به هكذا

مقدار المجهول بدرجة ثانية (في الحالة التي يكون مكره فيها الواحد) يساوى نصف مكر المجهول بدرجة أولى بعد تغيير اشارته زائداً أو ناقصاً الجذر التربيعي للكمية الناتجة من مربع هذا النصف مضافاً اليه الكمية المعلومة بعد تغيير اشارتها

وحيث ان الجذر في قانون (١) اشارتين فيكون للمجهول س مقداران فاذا رمز لهما بحرفي س' و س'' يكون

$$س' = \sqrt{\frac{س'^2}{٤} - ه} + \frac{س'}{٢} \text{ و } س'' = \sqrt{\frac{س''^2}{٤} - ه} - \frac{س''}{٢}$$

وبتطبيق هذا القانون على حل المعادلة

$$\begin{aligned} س'^2 + ٣س' - ٢٨ &= ٠ \text{ ينتج أن} \\ س' &= \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٢٨ \cdot ٤}}{٢} \text{ أى} \\ س' &= \frac{-٣ \pm ١١}{٢} \end{aligned}$$

واذا رمز لمقداري المجهول بحرفي س' و س'' ينتج

$$\begin{aligned} س' &= \frac{-٣ + ١١}{٢} = ٤ \text{ و} \\ س'' &= \frac{-٣ - ١١}{٢} = -٧ \end{aligned}$$



## ٢١٦ الصورة الثانية

$ح = س^٢ + س + ه = ٠$  ولحلها تقسم حدودها على ح  
فيحدث

$س^٢ + \frac{س}{ح} + \frac{ه}{ح} = ٠$  وبتطبيق القانون السابق على  
هذه المعادلة ينتج

$س = - \frac{\frac{س}{ح} + \frac{ه}{ح}}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{س}{ح} + \frac{ه}{ح}}{٢}\right)^2 - \frac{ه}{ح}}$  وباجراء عملية الطرح  
فيما تحت الجذر ينتج

$س = - \frac{\frac{س}{ح} + \frac{ه}{ح}}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{س}{ح} + \frac{ه}{ح}}{٢}\right)^2 - \frac{ه}{ح}}$  وبانحراج المقام من تحت  
علامة الجذر ينتج

$$(٢) \quad س = \frac{- \left( \frac{س}{ح} + \frac{ه}{ح} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{س}{ح} + \frac{ه}{ح} \right)^2 - ٤ ه}}{٢}$$

وهذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانية في حالة ما اذا  
كان مكرره غير الواحد وينطق به هكذا

مقدار المجهول بدرجة ثانية ( في الحالة التي يكون مكرره فيها غير  
الواحد ) يساوى كسرا اعتياديا بسطه مكرر المجهول بدرجة أولى بعد  
تغيير اشارته زائدا أو ناقصا الجذر التربيعي للكمية الناتجة من مربع  
هذا المكرر مضافا اليه أربعة أمثال حاصل ضرب مكرر المجهول بدرجة  
ثانية في الكمية المعلومة بعد تغيير اشارتها ومقامه ضعف مكرر المجهول  
بدرجة ثانية

وبتطبيق هذا القانون على حل المعادلة

$$٥ س^٢ + ٣ س - ٩٢ = ٠ \text{ ينتج}$$

$$\text{أى} \quad س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٩٢ \times ٥}}{٥ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٣ \pm ٤٣}{١٠} \text{ وإذا رمز لمقدارى المجهول بحرفى}$$

$$س' و س'' \text{ ينتج } س' = \frac{٤٠}{١٠} = ٤ \text{ و } س'' = -\frac{٤٦}{١٠} = -٤,٦$$

٣١٧ حالة خصوصية - اذا كان مكرر المجهول بدرجة أولى

$$\text{زوجيا كما فى المعادلة } س + ٢ س' + ه = ٠$$

التي فيها ٢ بدل عن س فى السابقة فانه يمكن اختصار القانون

السابق اذ بتطبيقه على هذه المعادلة ينتج أن

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ ه}}{٢}$$

وبأخذ ه مضروبا مشتركا فيما تحت الجذر وانحاجه ينتج

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ ه}}{٢}$$

وبقسمة حدى الكسر على ٢ ينتج

$$(٣) \quad س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ه}}{١}$$

وهو قانون لمعادلة الدرجة الثانية في هذه الحالة المخصوصة وعلى الطالب أن ينطق بهذا القانون قياسا على القانونين السابقين لتمرينه على التعبير اللفظي عن القوانين الجبرية

وبتطبيق هذا القانون على المعادلة  $س^٣ - ٤س - ١٥ = ٠$  ينتج

$$س = \frac{\sqrt{١٥ \times ٣ + ٤} \pm ٢}{٣} \text{ او}$$

$$س = \frac{\sqrt{٤٩} \pm ٢}{٣} \text{ ومنه}$$

$$س = \frac{٧+٢}{٣} = ٣ \text{ و } س = \frac{٧-٢}{٣} = \frac{٥}{٣}$$

٢١٨ تنبيه - يمكن أن يكتفى في الصورة الثانية (٢١٦، ٢١٧) بقسمة حدود المعادلة على مكرر المجهول بدرجة ثانية وتطبيق القانون الاول السابق بتمرة ٢١٥

مثلا لحل المعادلة

$$س^٥ + س^٣ - ٩٢س - ١٠ = ٠ \text{ نقسم حدودها على } ٥ \text{ فينتج}$$

$$س^٤ + ٠,٢س^٢ - ١٨,٤س - ٢ = ٠ \text{ وبتطبيق قانون (١) عليها ينتج}$$

$$س = \frac{\sqrt{٠,٢س^٢ + ١٨,٤س + ٢}}{٢} \text{ ومن هنا يؤخذ أن}$$

$$س = ٤ \text{ و } س = -٤,٦ \text{ وهوعين ماتقدم بتمرة ٢٠٠}$$

$$\text{ولحل المعادلة } س^٣ - ٤س - ١٥ = ٠ \text{ نقسم حدودها على } ٣ \text{ فينتج}$$

$$س^٣ - \frac{٤}{٣}س - ٥ = ٠ \text{ وبتطبيق قانون (١) عليها ينتج}$$

$$س = \sqrt{٢ \pm \frac{٢}{٩}} + \frac{٤}{٩} \text{ ومن هنا يؤخذ أن}$$

$$س' = ٣, س'' = -\frac{٢}{٩} \text{ وهو عين ما تقدم بتمرة ٢١٧}$$

ويستنتج من هذا أنه يمكن اعتبار الصورة الاولى لمعادلة الدرجة الثانية التامة صورة عمومية وهى الصورة المعتادة والاكثر استعمالا

٢١٩ تنبيه - يلاحظ عند تطبيق القوانين السابقة على معادلات الدرجة الثانية أن تكون اشارة المجهول بدرجة ثانية موجبة فان كانت سالبة لزم تغيير جميع اشارات المعادلة

تمرين ٥٧

المطلوب حل المعادلات الآتية

|                                   |                          |
|-----------------------------------|--------------------------|
| (١٢) $س' + س'' = ٥٤ - س$          | (١) $س' - س'' = ١٠ + س$  |
| (١٣) $س' - س'' = ١٧ - س$          | (٢) $س' - س'' = ١٤ + س$  |
| (١٤) $س' - س'' = ١ - س$           | (٣) $س' - س'' = ١١ + س$  |
| (١٥) $س' + س'' = ١٤ - س$          | (٤) $س' - س'' = ٢٤ + س$  |
| (١٦) $س' + س'' = ٤٨ - س$          | (٥) $س' - س'' = ٢٠ - س$  |
| (١٧) $س' - س'' = ٥١ - س$          | (٦) $س' + س'' = ٧٢ - س$  |
| (١٨) $س' + س'' = ١٠٤ - س$         | (٧) $س' + س'' = ٣٥ - س$  |
| (١٩) $س' - س'' = ١٨ + س$          | (٨) $س' + س'' = ٨ - س$   |
| (٢٠) $س' + س'' = ٣٠٤ - س$         | (٩) $س' + س'' = ٢٧ + س$  |
| (٢١) $س' - س'' = \frac{١}{٦} + س$ | (١٠) $س' + س'' = ٢٠ + س$ |
|                                   | (١١) $س' - س'' = ٢ - س$  |

$$0 = 20 - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4} \quad (22)$$

$$2 + \sqrt{3} = \frac{7 + \sqrt{0}}{1 - \sqrt{0}} \quad (23)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{0}}{1 + \sqrt{0}} \quad (24)$$

$$\frac{2 - \sqrt{0}}{0 + \sqrt{0}} = \frac{8 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{0}} \quad (25)$$

$$\frac{7}{7 + \sqrt{0}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{7 + \sqrt{4}} \quad (26)$$

$$\frac{3}{\sqrt{0}} = \frac{0}{2 + \sqrt{0}} - \frac{4}{1 - \sqrt{0}} \quad (27)$$

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{\sqrt{0} - 3} - \frac{1}{\sqrt{0} + 1} \quad (28)$$

$$\frac{178}{13} = \frac{7 - \sqrt{0}}{7 + \sqrt{0}} - \frac{7 + \sqrt{0}}{7 - \sqrt{0}} \quad (29)$$

$$\frac{13 + \sqrt{4}}{1 + \sqrt{0}} = \frac{11 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{0}} + \frac{2 - \sqrt{0}}{3 - \sqrt{0}} \quad (30)$$

$$\frac{\sqrt{0} - 4}{\sqrt{0}} = \frac{2 + \sqrt{0}}{\sqrt{0} + 4} \quad (31)$$

$$10 = \sqrt{0 + \sqrt{0} + 2} + \sqrt{8 + \sqrt{0} + 2} \quad (32)$$

$$210 = \sqrt{0} - \sqrt{0} \quad (33)$$

$$23 = \sqrt{11 + \sqrt{0} + 3} + \sqrt{0} \quad (34)$$

مسائل محلولة تطبيقاً على معادلات

الدرجة الثانية التامة

٢٢. ولنذكر مسائل تطبيقية على معادلات الدرجة الثانية

التامة وكيفية حلها بطريقة أتمام المربع فنقول

المسئلة الاولى - سمسار اشترى أطيانا بمبلغ ١٨٧٥ جنيهه فحفظ منها خمسة فدادين وباع الباقي بمبلغ ١٦٠٠ جنيهه رابحا ٥ جنيهات في كل فدان باعه فكم فدانا اشترى

الحل نرمز لعدد الافدنة التي اشتراها بحرف س فيكون ما باعه س - ٥ ويكون ثمن الفدان في حالة الشراء هو  $\frac{١٨٧٥}{س}$  جنيهها و ثمن الفدان في حالة البيع  $\frac{١٦٠٠}{س-٥}$  وحيث انه ربح ٥ جنيهات في الفدان تحدث المعادلة

$\frac{١٨٧٥}{س} + ٥ = \frac{١٦٠٠}{س-٥}$  نحذف المقامين ونختصر فيحدث  
 $\frac{س}{س} + ٥٠ = ١٨٧٥ = ٢٥$  نضم ٢٥ للطرفين لاتمام المربع في الطرف الاول

$\frac{س}{س} + ٥٠ = ٢٥ + ٢٥ = ١٨٧٥$  نستعويض الطرف الاول بما يساويه

$(س + ٢٥) = ١٨٧٥ + ٢٥$  نأخذ جذر الطرفين فينتج

$س + ٢٥ = ١٩٠٠$  نحول ٢٥ للطرف الثاني فينتج

$س = ١٩٠٠ - ٢٥ = ١٨٧٥$

ومن هنا يؤخذ أن  $س = ٢٥$  و  $س = ٧٥$  وبالنظر للمقدار الاول يعلم أن عدد الافدنة التي اشتراها ٢٥ فدانا ويكون ثمن الفدان ٧٥ جنيهها وأما المقدار الثاني فلا يوافق المسئلة

المسئلة الثانية - شخص اشترى جملة ياردات من الحرير بمبلغ ٥ جنيهات انجليزية ولو أخذ بهذا المبلغ عينه من حرير آخر ينقص ثمن اليارده منه شلنا لأخذ خمس ياردات زيادة عما اشترى فما عدد الياردات التي اشتراها

الحل نرسم لعدد الiardات التي اشتراها بحرف سه فيكون ثمن الiardة  $\frac{1}{10}$  شلنا وحيث انه لو أخذ من الحرير الآخر يأخذ خمس ياردات زيادة فيكون ثمن الiardة من الحرير الثاني  $\frac{1}{20}$  وحيث ان ثمن الiardة في هذه الحالة ينقص شلنا واحدا عما اشترى فتحدث المعادلة

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} + 1 &= \frac{1}{20} \text{ ولحلها نحذف المقامين ونختصر فيحدث} \\ \frac{1}{10} + 1 &= \frac{1}{20} \text{ وبإتمام المربع في الطرف الاول يحدث} \\ \frac{1}{10} + 1 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \text{ أو} \\ \frac{1}{10} + 1 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \text{ نأخذ جذر الطرفين} \\ \frac{1}{10} + 1 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \text{ نحول } \frac{1}{20} \text{ للطرف الثاني فينتج} \\ \frac{1}{10} + 1 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \text{ ومن هنا يؤخذ أن} \\ \frac{1}{10} + 1 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

أعني أن عدد الiardات التي اشتراها هو ٢٠ ياردة أما المقدار الثاني فلا يوافق المسئلة

المسئلة الثالثة - صانعان اشتغلا بأجرة يومية مختلفة أخذ الاول ٣٨٤ قرشا وأخذ الثاني ٢١٦ قرشا وكانت أيام شغل الثاني أقل من أيام شغل الاول بستة أيام ولكن لو اشتغل الثاني بقدر أيام الاول واشتغل الاول بقدر أيام الثاني لأخذوا أجرتين متساويتين فما غدد أيام شغل كل منهما وكم أجرته اليومية

الحل نفرض أن أيام الاول سر فتكون أيام الثانى سر - ٦  
وتكون الاجرة اليومية للاول  $\frac{٣٨٤}{سر}$  والاجرة اليومية للثانى  $\frac{٢١٦}{سر-٦}$   
واذا اشتغل الاول بقدر أيام الثانى تكون أجرته فى هذه الايام  
 $\frac{٣٨٤}{سر} (سر - ٦)$  واذا اشتغل الثانى بقدر أيام الاول تكون أجرته  
فى هذه الايام  $\frac{٢١٦}{سر-٦}$  سر وحيث انه فى هذه الحالة تكون الاجرتان  
متساويتين تحدث المعادلة

$$\frac{٣٨٤(سر-٦)}{سر} = \frac{٢١٦}{سر-٦} \text{ وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$سر = \frac{١٩٢ + ١٤٤}{١٤}$$

ومن هنا يؤخذ أن سر = ٢٤ و  $\frac{٢٤}{٧} = \frac{٢٤}{٧}$  وبالنظر للقدار  
الاول يكون أيام شغل الصانع الاول ٢٤ وأجرته اليومية ١٦ وأيام  
شغل الصانع الثانى ١٨ وأجرته اليومية ١٢ وأما المقدار الثانى  $\frac{٢٤}{٧}$  فلا  
يوافق المسئلة

المسئلة الرابعة - اذا سار قطار سكة حديدية ٥ كيلومترات زيادة  
عن سرعته الاصلية فى الساعة فانه يقطع ٢١٠ كيلو متر فى زمن أقل  
بساعة عما اذا سار بسرعته الاصلية ففى كم ساعة يقطع هذه المسافة  
بالسرعة الاصلية

الحل نرمز لعدد الساعات التى يقطع فيها هذه المسافة بالسرعة  
الاصلية بحرف سر فتكون سرعته فى الساعة  $\frac{٢١٠}{سر}$  وتكون سرعته فى  
الساعة فى الحالة الثانية  $\frac{٢١٠}{سر} + ٥$  وحيث انه يقطع الطريق فى هذه



الحالة في مدة أقل من الاولى بساعة واحدة فيقطعها في (س - ١) ساعة واذا ضرب مائة طعه في الساعة في عدد الساعات يكون الحاصل دالا على طول الطريق وحينئذ فتحدث المعادلة

$$(-\frac{1}{100} + 5) (س - 1) = 210 \text{ وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$س = ٠,٥ \pm ٦,٥$$

ومن هنا يؤخذ أن  $س' = ٧$  ,  $س'' = ٦$  وبالنظر للتقدير الاول يعلم أنه يقطع هذه المسافة في ٧ ساعات بالسرعة الاولى وعلى هذا فيقطعها في ٦ ساعات بالسرعة الثانية وأما المقدار الثاني فلا يوافق المسئلة

### تمارين ٥٨

(١) حربة التومبيل تجرى بسرعة منتظمة قطعت مسافة ١٨٠ ميلا في زمن معين واذا نقصت سرعتها ثلاثة أميال في الساعة تحتاج لثلاث ساعات زيادة لقطع تلك المسافة فما سرعتها في الساعة

(٢) ماهو العدد الذي اذا أضيف اليه جذره التربيعي كان الناتج مساويا الى  $١٥ \frac{3}{4}$

(٣) صاحب ورشة صناعية بالمتصوره اشترى من القاهرة مقدارا من الفحم الحجري بمبلغ ٨٤ جنبا انجليزيا ولكنه لو اشترى بهذا المبلغ فحما حجرييا من الاسكندرية لاختذه بسعر أقل من السعر الذي اشترى به شلنان وحصل على اربع طونولات زيادة عما اشترى فما مقدار السعر الذي اشترى به الطونولات الواحدة

- (٤) عدد يساوى حاصل ضرب ثلاثة أعداد صحيحة فردية متتالية وإذا قسم هذا العدد على كل عدد منها كان مجموع ثلاثة خواارج القسمة يساوى ٧١ فاهذا العدد
- (٥) تاجر باع قطعة قماش بمبلغ ٧٥ فرنكا ثم باع قطعة أخرى ينقص حدها أمتارها عن الاولى ستة أمتار بمبلغ ٢٧ فرنكا ولكن لو باع القطعة الاولى بسعر الثانية والثانية بسعر الاولى لباع الثمن ٩٠ فرنكا فما غن المتر من كل نوع
- (٦) أ ب محطتان سكة حديدية بينهما ٣٠٠ ميل قام في وقت واحد من كل منهما قطار قاصدا الاخرى فتقابل القطاران وبعد ٤ ساعات من تقابلهما وصل القائم من ب الى أ وبعد ٩ ساعات من التقابل أيضا وصل القائم من أ الى ب فاسرعة كل منهما في الساعة
- (٧) محيط مجلدة عربية ١٤٠ قلمًا فإذا أخذت ثمانية واحدة زيادة في كل دورة لصارت سرعة العربية أقل بمقدار ٢ ميل في الساعة فاسرعتها في الساعة بالميل
- (٨) بيعت قطعة أرض بسعر الفدان ١٤٤ جنيهًا وكان أصل ثمن الشراء بسعر سه جنيهًا وبذلك وجد أن ربح الفدان سه  $\frac{1}{4}$  فما مقدار سه
- (٩) حوض ملاء بجنتين معا في ١.٢٢ دقيقة والكبرى تملؤ في زمن أقل من الصغرى بمقدار ٢٤ دقيقة والمطلوب معرفة الوقت الكافي للملئ بكل منهما
- (١٠) راكب دراجة قطع مسافة في مدة أربع ساعات وآخر قطع ٨ كيلومترات زيادة منه في هذا الزمن ومعلوم أن الاول يلزمه ٤٢ دقيقة زيادة من الثاني في قطع ٢٨ كيلومتر فكم كيلومتر قطعها الاول في الاربع ساعات وما متوسط سرعة كل منهما في الساعة
- (١١) ح و محطتان بينهما ٢٤٠ ميلا قام ز أ من ح وبعد ساعة قام قطار ب من ح أيضا وبعد ساعتين وصل الى نقطة مر عليها أ منذ ٥٤ دقيقة فزيدت سرعته خمسة أميال في الساعة وبذلك لحق ب القطار أ وقت وصوله نقطة د فما السرعة التي قام بها كل منهما من ح

- (١٢) شخص اشترى مقدار من البرتقال بمبلغ ٢٠٠ ملين فتلّف منه ٢٥ برتقالة وباع كل برتقالة من الباقي بنحو يزيد عن ثمنها الاصلى  $\frac{3}{4}$  ملين وبذلك ربح ٧٠ مليناً فكم عدد البرتقال الذي اشتراه
- (١٣) ضبط مستطيل الشكل محيطه ٥٠٠ ياردة ومساحته ١٤٤٠٠ ياردة مربعة فما مقدار بعديه
- (١٤) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ١٥٤ متراً وقطرها ٥٥ متراً والمطلوب معرفة طولها وعرضها
- (١٥) محيط مربع يزيد من محيط مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة الاكبر تزيد عن ثلاثة أمثال مساحة الاصغر ٣٢٥ قدماً مربعاً فما ضلع كل منهما
- (١٦) في وسط قطعة أرض مربعة الشكل قصر مربع الشكل وحول هذا القصر ممشى من الحصى به عرضها أربعة أمتار وحول هذا الممشى زرع عرضه ٦ أمتار فإذا كان مساحة القصر والزرع ٧٢١ متراً مربعاً فما مساحة القصر
- (١٧) المطلوب إيجاد ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بحيث تكون مقادير أضلاع مثلث قائم الزاوية
- (١٨)  $a$  ب مستقيم طوله ١٠ سنتيمترات مذكّر الى نقطة ع بحيث كان  $ab \times ac$   
 $= b \times c$  أوجد مقدار  $a$  ع و ب ع مقرباً من المليمتر
- (١٩) المسالوم مستقيم ح والمطلوب تقسيمه الى خمسة ذات وسط وطرفين أى الى قسمين أكبرهما يكون وسطاً متناسباً بين المستقيم الكلى والجزء الاصغر ثم إيجاد المقدار الرقى للناجى بفرض ح يساوى ١٢ سنتيمتر
- (٢٠) المطلوب إيجاد القانون الذى يحسب به نصف قطر احدى قاعدتي مخروط ناقص بعد معرفة حجمه ونصف قطر القاعدة الاخرى والارتفاع

## مناقشة المعادلات ذات الدرجة الثانية

٢٢١ تقدم بكرة ٢١٨ أن معادلات الدرجة الثانية يمكن أن تأخذ صورة عمومية واحدة وهي  $s + s' + s'' = 0$  التي منها

$$s = -\frac{s'}{s''} \pm \sqrt{\frac{s'^2}{s''^2} - \frac{s''}{s''^2}}$$

ولمناقشة هذا القانون يقال انه يمكن أن يعتبر فيه ثلاث حالات  
الحالة الاولى - اذا كانت الكمية التي تحت علامة الجذر وهي  $\frac{s'^2}{s''^2}$   
-  $s < 0$  أى موجبة يكون الجذران حقيقيين ومختلفين المقدار  
ويدخل تحت ذلك ثلاث صور

الصورة الاولى - اذا كان  $s < 0$  أى موجبة تكون تحت الجذر  
سالبة ويكون

$$\frac{s'}{s''} > \sqrt{\frac{s'^2}{s''^2} - \frac{s''}{s''^2}} \text{ ومنه } \frac{s'}{s''} > \frac{s'}{s''}$$

ويكون مقدارا  $s$  في هذه الحالة بعلامة  $-\frac{s'}{s''}$  يعنى يكون له  
مقداران مختلفان بعلامة واحدة مخالفة لعلامة  $s$  فى المعادلة

الصورة الثانية - اذا كان  $s = 0$  يكون

$$\frac{s'}{s''} = \sqrt{\frac{s'^2}{s''^2} - \frac{s''}{s''^2}}$$

ويكون مقدارا  $s$  هما  $-\frac{s'}{s''} \pm \frac{s'}{s''}$  ومنه يكون  $s'' = 0$   
6  $s'' = 0$

يعنى ان لاجهول مقداران أحدهما صفر والثاني يساوى مكرر  $s$   
بعلامة مخالفة لعلامته

الصورة الثالثة - اذا كان  $h > 0$  . اى سالبة تكون تحت الجذر موجبة ويكون

$$\frac{r}{4} - h < \frac{r}{4} \text{ ومنه } \sqrt{\frac{r}{4} - h} < \frac{r}{4}$$

ويكون مقدارا  $h$  في هذه الصورة بعلامة الجذر يعنى يكون له مقداران مختلفان بعلامتين مختلفتين وزيادة على ذلك فان أكبرهما في القيمة المطلقة تكون علامته مخالفة لعلامة  $h$  في المعادلة

الحالة الثانية - اذا كانت الكمية التي تحت الجذر وهى  $\frac{r}{4} - h$  = 0 . أى معدومة يكون الجذران حقيقيين ومتساويين يعنى ان يعنى ماتحت علامة الجذر ويكون  $h = -\frac{r}{4}$  . ومنه يكون  $s' = -\frac{r}{4}$  و  $s'' = -\frac{r}{4}$

ومن ذلك يلاحظ أنه كلما كان المجهور  $\frac{r}{4} - h < 0$  . أى غير معدوم كان الجذران مختلفين عن بعضهما وهما يميلان الى نهاية واحدة متى مال  $\frac{r}{4} - h$  الى الصفر وهذه النهاية هى  $-\frac{r}{4}$

الحالة الثالثة - اذا كان المجهور  $\frac{r}{4} - h > 0$  . أى سالبا يكون الجذران تخيليين لأنه لما كان المقدار الذى تحت الجذر سالبا فلا يمكن استخراجه ولهذا يكون الجذران تخيليين

الارتباط بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومكرراتها

٢٢٢ تقدم أن كل معادلة ذات درجة ثانية يمكن أن توضع على هذه الصورة

$$s^2 + s + h = 0$$

وانه اذا رمز لمقدارى المجهول بحرفى  $س'$  و  $س''$  يكون

$$س' = \sqrt{\frac{٢٤}{٤} - ه} + \frac{٤}{٢} -$$

$$س'' = \sqrt{\frac{٢٤}{٤} - ه} - \frac{٤}{٢} -$$

فأولا - اذا جمع هذان المقداران ينتج

$$س' + س'' = - ه$$

أعنى أن مجموع جذرى معادلة الدرجة الثانية يساوى مكرر المجهول  
بدرجة أولى مع تغيير اشارته

وثانيا - اذا ضرب أحد المقدارين السابقين فى الآخر ينتج

$$س' س'' = \left( - \frac{٤}{٢} + \sqrt{\frac{٢٤}{٤} - ه} \right) \left( - \frac{٤}{٢} - \sqrt{\frac{٢٤}{٤} - ه} \right)$$

وحيث ان الطرف الثانى هو عبارة عن حاصل ضرب مجموع كبتين  
فى تفاضلهما فيساوى الفرق بين مربعيهما أعنى يكون

$$س' س'' = \frac{٢٤}{٤} - \left( ه - \frac{٢٤}{٤} \right) = ه$$

أعنى أن حاصل ضرب جذرى المعادلة يساوى الكمية المعلومة

٢٢٣ تنبيه اذا كانت معادلة الدرجة الثانية بالصورة

$$س^٢ + س + ه = ٠ \text{ فيسهل أن يرى مباشرة أن مجموع الجذرين } = - \frac{٤}{٢} \text{ و حاصل ضربهما } = \frac{٤}{٤}$$

٢٢٤ نتيجة أولى يمكن بواسطة ماتقدم معرفة اشارة جذرى  
معادلة الدرجة الثانية قبل حلها ولذلك يقال حيث ان  $س' \times س'' = ه$   
 $ه$  و  $س' + س'' = - ه$  فاذا كان  $ه$  موجبا علم أن اشارتى

المضروبين  $س$  و  $س$  من نوع واحد ونوع الاشارتين يخالف اشارة  
 ء لأن مجموعهما يخالف تلك الاشارة

وأما اذا كان ه سالبا فتكون الاشارتان مختلفتين وتكون اشار  
 أكبرهما في المقدار المطلق مخالفة لاشارة ء

مثال (١) لمعرفة اشارتى جذرى المعادلة

$$س^٢ - ٧س + ١٠ = ٠$$

يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى ١٠ وهو موجب  
 فيكونان متصداى الاشارة وحيث ان مجموعهما يساوى ٧ فيكونان  
 موجبين

مثال (٢) لمعرفة اشارتى جذرى المعادلة

$$س^٢ + ٥س - ٢٤ = ٠$$

يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى - ٢٤ وهو  
 سالب فيكونان مختلفى الاشارة وحيث ان مجموعهما يساوى ٥  
 فيكون المقدار المطلق لأكبرهما سالبا وقس على هذا

٢٢٥ نتيجة ثانية يمكن بواسطة ما تقدم تكوين معادلة الدرجة  
 الثانية بعد معرفة جذريها

مثال (١) اذا كان جذرا معادلة هما  $س = ٥$  و  $س = ٨$  يكون  
 $س + س = ٨ + ٥ = ١٣$  و  $س س = ٨ \times ٥ = ٤٠$   
 وحينئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى هو - ١٣ والكمية المعلومة

هى ٤٠ وتكون المعادلة هى

$$٠ = ٤٠ + س١ - س٢$$

مثال (٢) اذا كان  $س٢ = ٣ + ٥٧$  ,  $س١ = ٣ - ٥٧$  يكون

$$س٢ + س١ = ٣ - ٥٧ + ٣ + ٥٧ = ٦$$

$$س١ س٢ = (٣ - ٥٧)(٣ + ٥٧) = ٩ - ٥٠ = ٤$$

وحينئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى - ٦ والكمية المعلومة ٤ وتكون المعادلة

$$س٢ - س١ = ٦ + ٤ = ٠$$

مثال (٣) اذا كان  $س٢ = ٥ + ٣ - ١$  ,  $س١ = ٥ - ٣ - ١$  يكون

$$س١ + س٢ = ٥ - ٣ - ١ + ٥ + ٣ - ١ = ١٠$$

$$س١ س٢ = (٥ - ٣ - ١)(٥ + ٣ - ١) = ٩ - ٣٤ = ٣٤$$

ويكون مكرر المجهول بدرجة أولى - ١٠ والكمية المعلومة ٣٤ وتكون المعادلة

$$س١ - س٢ = ١٠ + ٣٤ = ٠$$



٢٢٦ نتيجة ثالثة - اذا علم مجموع عددين وحاصل ضربهما  
يمكن أن توضع معادلة ذات درجة ثانية يكون جذراها العددين  
المذكورين

مثلا اذا كان مجموع عددين ١٦ وحاصل ضربهما ٦٣ فيكون  
العددان المطلوبان هما جذرا معادلة ذات درجة ثانية فيها مكر  
المجهول بدرجة أولى - ١٦ والكمية المعلومة ٦٣ وحيثذ فتوضع المعادلة

$$\text{سم}^2 - ١٦ \text{ سم} + ٦٣ = ٠ \text{ وبحلها يوجد}$$

$$\text{سم} = \frac{16 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 63}}{2} \text{ أى}$$

$$\text{سم} = ٩ \text{ سم} \text{ و } ٧$$

أى أن العددين المطلوبين هما ٩ و ٧

### تمرين ٥٩

بين علامتى جنزكل واحدة من المعادلات الآتية قبل حلها

$$\begin{array}{l|l} (١) \text{ سم}^2 - ٦ \text{ سم} + ٥ = ٠ & (٥) \text{ سم}^2 - ١٣ \text{ سم} + ٦ = ٠ \\ (٢) \text{ سم}^2 + ٣ \text{ سم} - ١٠ = ٠ & (٦) \text{ سم}^2 - ٤ \text{ سم} - ٤ = ٠ \\ (٣) \text{ سم}^2 - ٨ \text{ سم} + ١٦ = ٠ & (٧) \text{ سم}^2 - ١٢ \text{ سم} + ٤ = ٠ \\ (٤) \text{ سم}^2 - ٨ \text{ سم} - ٢٠ = ٠ & (٨) \text{ سم}^2 + ٩ \text{ سم} + ٧ = ٠ \end{array}$$

المطلوب تكونين معادلات الدرجة الثانية التى جنزورها الكميات الآتية

$$\begin{array}{l|l} (٩) ٣ و ٢ & (١٢) ٣ - و ٧ - \\ (١٠) ٧ و ٤ & (١٣) ٢٧ + ٢ و ٢٧ - ٢ \\ (١١) ٠,٥ و ٣ - & (١٤) ٢٧ + ٥ و ٢٧ - ٥ \end{array}$$

$$(١٥) \quad \overline{1-7-2}, \overline{1-7+2}$$

$$(١٦) \quad \overline{1-72-1-}, \overline{1-72+1-}$$

(١٧) ماهما العدان اللذان مجموعهما ١٥ وحاصل ضربهما ٥٤

(١٨) ماهما العدان اللذان مجموعهما ١٩ وحاصل ضربهما ٩٠

(١٩) اقسام ٦٠ الى جزأين بحيث يكون حاصل ضربهما ١٩٩

(٢٠) ماهو العدد القاسم الى ٣٦ بحيث يكون مجموع المقسوم عليه

والخارج ١٥

(٢١) ما بعدا المستطيل الثنى محيطه ٢٨ قدما ومساحته ٤٥ فلما ضربا

### المعادلات المضاعفة التريبع

٢٢٧ تعريف - المعادلة المضاعفة التريبع هي معادلة

ذات درجة رابعة لا تحتوى على المجهول بأس فردى

مثل المعادلة  $س^٤ + س^٢ + ه = ٠$

٢٢٨ حل المعادلة المضاعفة التريبع - حل المعادلة

$$س^٤ + س^٢ + ه = ٠$$

نفرض أن  $س^٢ = ص$  فيكون  $س^٤ = ص^٢$  وتؤول المعادلة الى

$$ص^٢ + ص + ه = ٠ \text{ وبحل هذه المعادلة يوجد}$$

$$(١) \quad ص = \frac{-١ \pm \sqrt{١-٤ه}}{٢}$$

وبحيث ان  $ص = س^٢$  فبوضعه بدله يحدث

$$س^٢ = \frac{-١ \pm \sqrt{١-٤ه}}{٢} \text{ وبأخذ جذر الطرفين يحدث}$$

$$س = \pm \sqrt{\frac{-١ \pm \sqrt{١-٤ه}}{٢}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{r_2}{0} - \frac{s}{r}} &= \sqrt{\frac{r_2}{2} + \frac{s}{r}} \\ \sqrt{\frac{r_2}{2} - \frac{s}{r}} &= \sqrt{\frac{r_2}{2} + \frac{s}{r}} \end{aligned}$$

نستعمل القانون السابق فيحدث

سـ =  $\sqrt[4]{\pm 2,5 \pm 6,25 - 4}$  ومنه يكون  
 سـ = ٢ ، سـ = ١ ، سـ = -٢ ، سـ = -١  
 وكل منها يحقق المعادلة

٢٢٩ تنبيه (١) اذا كان جذرا المعادلة (١) حقيقيين وإيجابيين تكون هذه المقادير كلها حقيقة وإذا كان أحد جذري المعادلة المذكورة إيجابيا والآخر سلبيا يكون اثنان من هذه المقادير حقيقيين واثنان تخيليين وإذا كانا سلبيين تكون هذه المقادير كلها تخيلية

تنبيه (٢) اذا كان للجهول بدرجة رابعة مكرر غير الواحد  
كما في المعادلة

$$0 = 5 + 2s + 4s$$

فاما أن تقسم جميع حدودها على  $h$  ونجرب العمل كما في النمرة السابقة واما أن نفرض في هذه المعادلة مباشرة أن  $s^2 = صه$  ويكون  $s^4 = صه^2$  وتؤول المعادلة المفروضة الى معادلة ذات درجة ثانية بالصورة التي للجهول بدرجة ثانية مكرر غير الواحد وتحل كما تقدم بنمرة ٢١٦

### تمرين ٦٠

المطلوب حل المعادلات الآتية

$$\begin{array}{l|l} (١) \quad s^4 - ١٣s^2 + ٣٦ = ٠ & (٦) \quad s^4 - ٤٥s^2 - ١٩٦ = ٠ \\ (٢) \quad s^4 - ٤١s^2 + ٤٠٠ = ٠ & (٧) \quad s^4 - ٢s^2 - ٦٣ = ٠ \\ (٣) \quad s^4 - ٥s^2 + ١ = ٠ & (٨) \quad s^4 + ٢٠s^2 - ٥٥٥ = ٠ \\ (٤) \quad s^4 - ١٠s^2 + ٩ = ٠ & (٩) \quad s^4 + ١٣s^2 + ٣٦ = ٠ \\ (٥) \quad s^4 - ٣٥s^2 - ٣٦ = ٠ & (١٠) \quad s^4 - ٦s^2 + ٧ = ٠ \end{array}$$

(١١) ما هو العدد الذي اذا ضرب في باقي طرحه من مكعبه ينتج ٦٠٠

(١٢) ابحث من أساس العدبة التي يكتب بها العدد ١٢٥٥١ مبينا بالوضع ٣٠٤٠٧

### معادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

٣٣٠ معادلة الدرجة الثانية ذات المجهولين يمكن أن تحتوى على كل منهما بدرجة ثانية وبدرجة أولى وعلى حاصل ضربيهما وعلى كمية معلومة - مثل

$$١ \quad s^2 + ب \quad صه^2 + ح \quad صه + د \quad صه + هـ \quad صه + و = ٠$$

وكل من المقادير  $أ, ب, ح, د, هـ, و$  وقد يكون حدا واحدا او كمية ذات حدود موجبة أو سالبة وقد يكون بعضها معدوما

٣٣١ مجموعة معادلتين بدرجة ثانية - قد تحتوى هذه المجموعة على معادلة بدرجة ثانية وأخرى بدرجة أولى وقد تحتوى على معادلتين كل منهما بدرجة ثانية .

٣٣٢ قاعدة - لحل مجموعة معادلتين بمجهولين احدهما بدرجة ثانية والأخرى بدرجة أولى تتبع طريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى ويراعى حذف أحد المجهولين بطريقة الوضع بأن يستخرج مقداره من المعادلة ذات الدرجة الاولى ويعوض به في الثانية

المثال الاول - حل المجموعة  $2س + 3ص = 35$  (١)

(٢)  $س + 2ص = 8$

نستخرج مقدار  $س$  من معادلة ٢ ونضع الناتج بدلا عن  $س$

في معادلة ١ فينتج  $2(8 - 2ص) + 3ص = 35$  (٣)

وبحل هذه المعادلة نجد  $ص = 3$  أو  $\frac{31}{11}$  فاذا وضع هذان

المقداران على التوالى بدلا عن  $ص$  في معادلة ٢ واستخرج من

المعادلة الناتجة مقدار  $س$  ينتج  $س = 2$  أو  $\frac{67}{11}$  وعلى هذا يكون

$$س = 2, ص = 3 \text{ أو } س = \frac{31}{11}, ص = \frac{67}{11}$$

وكلا الحلين يحقق المجموعة

المثال الثانى - حل المجموعة

(١)  $س + 5س - 2ص = 22$

(٢)  $7س - 11ص = 11$

نستخرج مقدار صه من معادلة (٢) فنجد صه = ٧ س

— ١١ ثم نضع هذا المقدار بدلا عن صه في معادلة (١)

فيحدث

$$\text{سه}^2 + ٥\text{سه} - (٧ - ١١) - ٢ - (٧ - ١١) = ٣ - \text{سه} - ٢٢ = ٠$$

ثم نحذف الأقواس ونختصر الحدود المتشابهة فيحدث

$$٦٢ \text{سه}^2 - ٢٥٦ \text{سه} + ٢٦٤ = ٠ \text{ وبحل هذه المعادلة}$$

$$\text{يحلت } \text{سه} = \frac{11}{3} \text{ أو } ٢$$

فاذا وضع بدلا عن سه المقدار الاول  $\frac{11}{3}$  في معادلة (٢) ينتج أن صه =  $\frac{28}{3}$  ٣ واذا وضع بدلا عن سه المقدار الثاني ٢ في تلك المعادلة ينتج أن صه = ٣

٢٣٣ حل مجموعات خصوصية بدرجة ثانية ذات مجهولين  
مكونة من معادلتين احدهما بدرجة أولى - يمكن حل بعض مجموعات  
بدرجة ثانية ومجهولين في أحوال خصوصية بطرق تحيلية كثيرة  
الاستعمال وأهمها إيجاد مقدارى المجهولين بواسطة تكوين معادلة  
ذات درجة ثانية من مجموع كيتين وحاصل ضربهما أو تحويل  
المجموعة الى مجموعة مكافئة لها ذات درجة أولى (واليك بيانها)

الحالة الاولى - اذا أريد حل المجموعة

$$(١) \quad \text{سه} + \text{صه} = ١٠$$

$$(٢) \quad \text{سه} - \text{صه} = ٢٤$$

يشاهد مباشرة أن مقدارى  $س$  و  $ص$  هما جذرا معادلة بدرجة ثانية (٢٢٦) فاذا رمز لمجهولها بحرف  $ع$  يحدث

$$ع^2 - ١٠ع + ٢٤ = ٠ \text{ وبحلها نجد}$$

$$ع = ٥ \pm ١$$

ويكون أحد الجذرين هو مقدار  $س$  والآخر مقدار  $ص$  أى  
 $س = ٦$  و  $ص = ٤$  أو بالعكس

ويمكن حل هذه المجموعة بطريقة أخرى وهى ربيع طرفا معادلة (١)

فينتج  $س^2 + ص^2 + ٢س = ١٠٠$  ويؤخذ من معادلة (٢)

أن  $٤س = ص^2$  تطرح هذه المعادلة

من السابقة فينتج

$س^2 + ص^2 - ٢س = ٤$  وبأخذ الجذر التربيعى

للطرفين ينتج

$$(٣) \quad س - ص = \pm ٢$$

ثم يكون من معادلتى (١) و (٣) مجموعة تكون باحدى الصورتين

$$\left. \begin{array}{l} (١) \quad س + ص = ١٠ \\ (٢) \quad س - ص = ٢ \end{array} \right\} \text{ أ } \quad \left. \begin{array}{l} (١) \quad س + ص = ١٠ \\ (٢) \quad س - ص = -٢ \end{array} \right\} \text{ ب }$$

وبحل مجموعة (أ) ينتج  $س = ٦$  و  $ص = ٤$

وبحل مجموعة (ب) ينتج  $س = ٤$  و  $ص = ٦$

الحالة الثانية - لى المجموعة  $س - ص = ٢$  (١)

(٢)  $س = ٢٤$

نعتبر أن المجهولين هما  $س$  و  $ص$  فيكون مجموعهما  $س + ص = ٢$  وحاصل ضربهما  $س \times ص = -٢٤$  ويكون  $س = ٦$  و  $ص = -٤$  هما جذرا المعادلة

$$ع^2 - ٢ع + ٢٤ = ٠ \quad \text{وبحلها نجد}$$

$$ع = ١ \pm ٥$$

ويكون أحد الجذرين هو مقدار  $س$  والثاني مقدار  $ص$  فاما أن يكون  $س = ٦$  و  $ص = -٤$  وبناء عليه يكون  $ص = ٤$  واما أن يكون  $س = -٤$  و  $ص = ٦$  فيكون  $ص = -٦$  والتحقق واضح

ويمكن أن تحل هذه المجموعة بطريقة أخرى وهي أن يربع طرفا معادلة (١)

فينتج  $س^2 + ص^2 - ٢سص = ٤$  ويؤخذ من معادلة (٢) أن  $٤س = ٩٦$  بجمع هاتين المعادلتين فنجد  $س^2 + ٢س = ١٠٠$  وبأخذ جذر الطرفين

$$(٣) \quad ١٠ \pm = س + ص \quad \text{ينتج}$$

ثم يكون من معادلتى (١) و (٣) مجموعة تكون باحدى الصورتين

$$\left. \begin{array}{l} س - ص = ٢ \\ س + ص = ١٠ \end{array} \right\} \text{ ب } \left. \begin{array}{l} س - ص = ٢ \\ س - ص = -١٠ \end{array} \right\}$$

وبحل مجموعة (أ) يحدث  $س = ٦$  ,  $ص = ٤$

وبحل مجموعة (ب) يحدث  $س = -٦$  ,  $ص = -٤$



الحالة الثالثة - لحل المجموعة

$$(١) \quad ١٣ = ص^٢ + س^٢$$

$$(٢) \quad ٥ = ص + س$$

نربع طرفي المعادلة الثانية فيحدث

$$(٣) \quad ٢٥ = ص^٢ + ٢ ص س + س^٢$$

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة ٣ فيحدث

$$(٤) \quad ١٢ = ص س \quad \text{أو} \quad ٦ = ص$$

فاذا كوت مجموعة من معادلتى ٢ و ٤ يشاهد أنه قد علم مجموع كيتين وحاصل ضربهما فيكون مقدارا س و ص هما جذرا المعادلة

$$ع^٢ - ٦ ع - ٥ = ٠ \quad (٥) \quad \text{وبحلها يحدث}$$

$$ع = ٢,٥ \pm ٠,٥$$

ويكون أحد الجذرين مقدار س والآخر مقدار ص أى

$$س = ٣ \quad \text{و} \quad ص = ٢ \quad \text{أو بالعكس}$$

ويصبح أنه بعد الحصول على معادلة (٤) يكون منها ومن معادلة (٢)

مجموعة نحل بالطريقة الأخيرة من الحالة الاولى

$$(١) \quad ١٣ = ص^٢ + س^٢ \quad \text{الحالة الرابعة - لحل المجموعة}$$

$$(٢) \quad ١ = ص - س$$

$$(٣) \quad ١ = ص^٢ - ٢ ص س + س^٢ \quad \text{نربع طرفي المعادلة (٢) فينتج}$$

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣) فينتج

$$(٤) \quad ١٢ = ص - س \quad \text{أو} \quad ٦ = ص - س$$

فاذا كانت مجموعة من معادلتى (١) و (٤) واعتبر أن المجهولين  $s$  و  $-$   $s$  كانت مجموعهما يساوى ١ وحاصل ضربهما يساوى  $-٦$  ويكون مقدارا  $s$  و  $-s$  هما جذرا المعادلة

$$x^2 - ٦x + ٠ = ٠ \quad (٥) \text{ وبحل هذه المعادلة نجد}$$

$$٠,٥ = x \pm ٢,٥ \text{ أى } x = ٣ \text{ و } x = -٢$$

ويكون أحد الجذرين مقدار  $s$  والآخر مقدار  $-s$  فاما أن يكون  $s = ٣$  و  $-s = -٢$  وبناء عليه يكون  $s = ٢$  واما أن يكون  $s = -٢$  و  $-s = ٣$  وبناء عليه يكون  $s = -٣$

ويصبح بعد الحصول على معادلة (٤) أن يكون منها ومن معادلة (٢) مجموعة تحل بالطريقة الأخيرة من الحالة الثانية

الحالة الخامسة - اذا أريد حل المجموعة

$$(١) \quad s - s = ٢٠$$

$$(٢) \quad s + s = ١٠$$

يلاحظ أن معادلة (١) يمكن أن تكتب هكذا

$$(s + s) (s - s) = ٢٠ \quad (٣) \text{ وبقسمة طرفى هذه}$$

$$\text{المعادلة على طرفى معادلة (٢) ينتج } s - s = ٢ \quad (٤)$$

ثم يكون من معادلتى (٢) و (٤) مجموعة بحلها نجد

$$s = ٦ \text{ و } s = ٤$$

الحالة السادسة - اذا أريد حل المجموعة

$$(١) \quad س^٢ - ص^٢ = ٢٠$$

$$(٢) \quad س - ص = ٢$$

يلاحظ كما في الحالة السابقة أن معادلة (١) تقبل القسمة على

$$(٣) \quad ١٠ = ص + س \quad \text{وبقسمتها عليها ينتج } س + ص = ١٠$$

ثم تكون مجموعة من معادلتى (٢) و (٣) وبحلها نجد

$$س = ٦ \text{ و } ص = ٤$$

الحالة السابعة - اذا أريد حل المجموعة

$$(١) \quad س^٢ + ٥ س - ص^٢ = ١٧٢$$

$$(٢) \quad س + ص = ١٠$$

تربع المعادلة الثانية وتطرح من الاولى فينتج  $٣ س - ص = ٧٢$

$$(٣) \quad ٢٤ = س - ص \quad \text{أو } س - ص = ٢٤$$

ثم تكون من معادلتى (٢) و (٣) مجموعة تحل كما تقدم فنجد

$$\text{ان } س = ٦ \text{ و } ص = ٤ \text{ أو بالعكس}$$

الحالة الثامنة - اذا أريد حل المجموعة

$$(١) \quad س^٢ + ٥ س - ص^٢ = ١٧٢$$

$$(٢) \quad س - ص = ٢$$

تربع معادلة (٢) ويطرح الناتج من معادلة (١) فينتج

$$٧ س - ص = ١٦٨ \quad \text{أو } س - ص = ٢٤ \quad (٣) \quad \text{ثم تكون من معادلتى (٢) و (٣)}$$

مجموعة تحل كما تقدم فنجد  $س = ٦ \text{ و } ص = ٤ \text{ أو بالعكس}$

٢٣٤ تنبيه - يمكن حل هذه المجموعات الخصوصية بالطريقة  
العمومية نمرة ٢٣٢

تمرين ٦١

المطلوب حل المجموعات الآتية

|                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| $14 = ص^3 + س^2$ (٨) | $٧٥ = ص + س$ (١)   |
| $148 = ص^9 + س^4$    | $14 = س$           |
| $3 = ص - س$ (٩)      | $22 = ص^4 + س$ (٢) |
| $12,0 = ص + س$       | $6 = س$            |
| $10 = ص - س^3$ (١٠)  | $4 = ص - س$ (٣)    |
| $110,0 = ص^9 + س^4$  | $63 = ص$           |
| $56 = ص - س$ (١١)    | $0 = ص - س^2$ (٤)  |
| $14 = ص + س$         | $42 = ص$           |
| $30 = ص - س^9$ (١٢)  | $0 = ص - س^2$ (٥)  |
| $7 = ص + س^3$        | $13,0 = ص$         |
| $16 = ص - س$ (١٣)    | $11 = ص - س^2$ (٦) |
| $2 = ص - س$          | $3 = ص$            |
| $2 = ص - س^2$ (١٤)   | $7 = ص + س$ (٧)    |
| $28 = ص - س^4$       | $20 = ص + س^2$     |

$$179 = ص^3 + ص^2 + س^2 + س^3$$

$$12 = ص + س$$

$$30 = ص^2 + ص + س + س^2$$

$$3 = ص + س$$

$$21 = ص^2 + ص + س^3 + س^2$$

$$1 = ص - س$$

$$133 = ص^4 + ص^6 + س^9 + س^2$$

$$0 = ص - س^2$$

٣٣٥ حل مجموعة معادلتين كلتاهما بدرجة ثانية - تحل هذه المجموعة بطريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى غير أنه بعد حذف أحد المجهولين إذا لم نتوصل الى معادلة من المعادلات التي سبق الكلام على حلها ( كأن وجدت بدرجة رابعة واشتملت على المجهول بدرجات ثالثة وثانية وأولى ) فلا يمكن الحل بواسطة ماتقدم وانما تحل بواسطة طرق تحايليه ان أمكن والا فبواسطة قواعد مقرره في علم الجبر العالى

المثال الاول - اذا أريد حل المجموعة

$$(1) \quad 2x^2 + 3x = 77$$

$$(2) \quad 3x^2 - 5x = 66$$

نحذف المجهول  $x$  بطريقة الجمع أو الطرح فينتج

$$11x^2 = 275 \text{ ومنها } x = \pm 5$$

فاذا وضع بدلا عن  $x$  مقداره الاول وهو ٥ في معادلة (١) ينتج

$$50 + 3x = 77 \text{ ومنها } x = 9$$

فيكون  $x = 5$  و  $x = 9$  أو  $x = 5$  و  $x = 9$

واذا وضع بدلا عن  $x$  مقداره الثاني - ٩ في معادلة (١)

تنتج المعادلة (٢) عنها ويكون  $x = 5$  و  $x = 9$

$$\text{أو } x = 5 \text{ و } x = 9$$

المثال الثاني - اذا أريد حل المجموعة

$$(1) \quad x^2 + 3x - 3x - 6 = 0$$

$$(2) \quad 2x^2 + 3x + 5x - 69 = 0$$

نضرب طرفي معادلة (١) في ٣ ثم نطرح من الناتج معادلة (٢)

$$(٣) \quad ٠ = ٨٧ + ص - ٥ - ٤ - ١٤ - ٢$$

ثم نستخرج من هذه المعادلة مقدار ص بفرض أن ص معلوم

$$\text{فينتج ص} = \frac{٨٧ + ص + ٤ + ٢}{٥ + ١٤} \quad (٤) \quad \text{ثم نستعويض المجهول ص}$$

في معادلة (١) بمقداره من معادلة (٤) فينتج

$$\frac{(٨٧ + ص + ٤ + ٢) - ٣}{٥ + ١٤} - \left( \frac{٨٧ + ص + ٤ + ٢}{٥ + ١٤} \right) + ٢$$

$$٠ = ٦ + \frac{٨٧ + ص + ٤ + ٢}{٥ + ١٤} - ٣$$

وبحذف المقامات والاختصار يحدث

$$١٥٥ - ٣ + ١٤٧ - ٢٢٤٤ - ٢ - ٩٨٢ + ٠ = ٧٢٨٤ \quad (٥)$$

وحيث ان هذه المعادلة (٥) بدرجة رابعة ومشملة على المجهول

ص بدراجات ثالثة وثانية وأولى فلا يمكن حلها بواسطة ماتقدم من القواعد

٣٣٦ توجد طرق مهمة تحايلية لحل مجموعات خصوصية ذات

معادلتين احدهما أو كلاهما بدرجة أعلى من الدرجة الاولى سنبينها بالأمثلة الآتية

$$(١) \quad ٨٩ = ص + ٢$$

$$(٢) \quad ٤٠ = ص$$

نضرب معادلة (٢) في ٢ ونجمع المعادلة التي تنتج على معادلة (١) ثم نطرحها منها فينتج على التوالى

$$(٣) \quad ١٦٩ = ٢س + ص + ص$$

$$(٤) \quad ٤٩ = ٢س - ص + ص$$

وبأخذ جذر كل من طرفي هاتين المعادلتين نجد

$$(٥) \quad ١٣ \pm = س + ص$$

$$(٦) \quad ٧ \pm = س - ص$$

ومن معادلتى (٥) و (٦) تكون الاربع مجموعات الآتية

$$\begin{array}{l|l} (٣) \quad ١٦٩ = ٢س + ص + ص & (١) \quad ١٣ = س + ص \\ ٧- = س - ص & ٧ = س - ص \\ (٤) \quad ١٦٩ = ٢س - ص + ص & (٢) \quad ١٣- = س + ص \\ ٧ = س - ص & ٧- = س - ص \end{array}$$

وبحل هذه المجموعات ينتج على التوالى  $١٠ = ص$  و  $٣ = س$

$$٦س = ١٠- و ٣- = س و ٦س = ٣ و ١٠ = ص$$

$$٦س = ٣- و ١٠- = ص$$

$$(١) \quad ٩٨ = ٣س - ص$$

$$(٢) \quad ٢ = س - ص$$

نقسم معادلة (١) على معادلة (٢) ثم نربع معادلة ٢ ينتج

$$(٣) \quad ٤٩ = ٣س + ص$$

$$(٤) \quad ٤ = ٢س + ص$$

نطرح معادلة (٤) من معادلة (٣) فينتج

$$(٥) \quad ٣ \text{ صه} = ٤٥ \text{ أى } ٣ \text{ صه} = ١٥$$

ومن معادلتى (٢) و (٥) يمكن تكوين مجموعة تحل كما سبق

فى الحالة الثانية من نمرة ٢٣٣ فنجد  $٣ = ٥$  و  $٣ = ٥$  أو  $٣ = ٥$  و  $٣ = ٥$

المثال الثالث - حل المجموعة  $٣ + ٣ + ٣ = ١٣٣$  (١)

$$(٢) \quad ٣ + ٣ + ٣ = ١٩$$

نقسم معادلة (١) على معادلة (٢) فينتج

$$(٣) \quad ٣ - ٣ = ٣ + ٣ = ٧$$

نجمع معادلتى (٢) و (٣) ثم نطرح معادلة (٣) من معادلة (٢) فينتج

$$(٤) \quad ٢٦ = ٢ + ٣ = ٢٦ \quad \text{على التوالى}$$

$$(٥) \quad ٢ = ٢ \text{ صه} = ١٢$$

ثم نقسم كلا من معادلتى (٤) و (٥) على ٢ فينتج

$$(٦) \quad ١٣ = ٣ + ٣$$

$$(٧) \quad ٦ = ٣ \text{ صه}$$

ثم تحل هذه المجموعة كما فى المثال الاول فتوجد أربعة حلول وهى

$$٢ = ٣ \text{ و } ٢ = ٣ \text{ و } ٢ = ٣ \text{ و } ٢ = ٣$$

$$٣ = ٢ \text{ و } ٣ = ٢ \text{ و } ٣ = ٢ \text{ و } ٣ = ٢$$

المثال الرابع - حل المجموعة  $\frac{٢}{١٥} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}$  (١)

$$(٢) \quad \frac{٢٤}{٢٢٥} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}$$



نربع معادلة (١) فينتج  $\frac{1}{س^2} = \frac{1}{ص^2} - \frac{1}{س^2} + \frac{1}{س^2}$  (٣)

ثم نطرح معادلة ٣ من ٢ فينتج  $\frac{2}{س^2} = \frac{2}{ص^2}$  لجمع معادلتى

(٢) و (٤) فنجد  $\frac{1}{س^2} = \frac{1}{ص^2} + \frac{1}{ص^2} + \frac{1}{ص^2}$  نأخذ

جذر الطرفين فينتج

$$(٥) \quad \frac{1}{س} \pm = \frac{1}{ص} + \frac{1}{ص}$$

ومن معادلتى (١) و (٥) تركب مجموعة باحدى الصورتين

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{س} &= \frac{1}{ص} - \frac{1}{س} \\ \frac{1}{س} - &= \frac{1}{ص} + \frac{1}{س} \end{aligned} \right\} \text{أو} \quad \left. \begin{aligned} \frac{2}{س} &= \frac{1}{ص} - \frac{1}{س} \\ \frac{1}{س} &= \frac{1}{ص} + \frac{1}{س} \end{aligned} \right\}$$

فن المجموعة الاولى يستنتج أن  $س = ٣$  و  $ص = ٥$  ومن

الثانية يستنتج أن  $س = ٥$  و  $ص = ٣$

المثال الخامس لحل المجموعة  $س^2 + س + ص = ٢٣$  (١)

$٢س^2 + س + ص = ٢٨$  (٢)

نأخذ مجهولا مساعدا فنفرض أن  $ص = م$  ثم نستعوض

ص بهذا المقدار في المعادلتين فينتج

$$٢٣ = س^2 + م + ٢م$$

$$٢٨ = ٢س^2 + م + م$$

ثم نأخذ  $س^2$  مضروبا مشتركا في المعادلتين فينتج

$$(٣) \quad ٢٣ = س^2 (١ + ٢ + م)$$

$$(٤) \quad ٢٨ = س^2 (٢ + ٢ + م)$$

نقسم معادلة (٣) على معادلة (٤) فينتج

$$\frac{23}{28} = \frac{2^2 + 2 + 1}{2^2 + 2 + 2}$$

وبحذف المقامين والاختصار ينتج

$$(٥) \quad ٠ = ١٨ - ٢٥ + 2^2$$

$$\text{ثم نحل هذه المعادلة فنجد } 2 = \frac{2}{4} \text{ أو } \frac{9}{11}$$

فاذا وضع في احدى معادلتى (٣) و (٤) بدلا عن م المقدار الاول  $\frac{2}{4}$  وحلت المعادلة التى تنتج نجد  $ص = ٣ \pm$  وبناء على هذا يكون  $ص = ٢$  أو  $٣$

واذا وضع بدلا عن م في احدى المعادلتين المذكورتين المقدار الثانى

$$- \frac{9}{11} \text{ نجد أن } ص = \pm \frac{2711}{4} \text{ وبناء عليه يكون}$$

$$ص = \frac{279}{4} \text{ أو } \frac{279}{4}$$

المثال السادس - حل المجموعة  $ص^2 + ١٤٤ = ٢٥$   $ص = (١)$

$$(٢) \quad ١٠ = ص + ص$$

نأخذ مجهولا مساعدا فنفرض أن  $ص = ع$  فيكون  $ص^2 = ع^2$   
 $= ع$  ثم نستعويض الجاهيل في معادلة (١) بهذه المقادير فينتج

$$(٣) \quad ع^2 = ١٤٤ + ع$$

وبحل هذه المعادلة نجد  $ع = ١٦$  أو  $٩$  أى أن

$$(٥) \quad ١٦ = ص \quad (٤) \quad ٩ = ص$$

ثم نكون مجموعة من معادلتى (٢) و (٤) وأخرى من معادلتى (٢) و (٥) وتحل المجموعتان المذكورتان كما تقدم في الحالة الاولى من نمرة ٢٣٣ فبحل المجموعة الاولى منهما نجد  $s = ٨$  و  $v = ٢$  أو  $s = ٢$  و  $v = ٨$  وبحل المجموعة الثانية نجد  $s = ٩$  و  $v = ١$  أو  $s = ١$  و  $v = ٩$  فيكون للمجموعة المفروضة أربعة حلول

المثال السابع - حل المجموعة

$$(١) \quad s^2 + v^2 + ٢s = ٥٤ - ٦s + v$$

$$(٢) \quad ٢s + v + s + v = ١٣$$

نحول الحدود المشتملة على الجاهيل في معادلة (١) الى الطرف الاوّل ونضرب معادلة (٢) في ٦ فينتج

$$(١) \quad s^2 + v^2 + ٢s + ٦s + ٦v = ٥٤ + ٦v$$

$$(٣) \quad ١٢s + ٦v + ٦s + ٦v = ٧٨$$

نطرح معادلة (٣) من (١) فنجد

$$s^2 + v^2 - ١٠s - ٦v = ٢٤ \text{ أو } s^2 + v^2 - ١٠s + ٢٤ = ٠$$

$$(٤) \quad s^2 + v^2 - ١٠s + ٢٤ = ٠$$

ثم نحل هذه المعادلة باعتبار أن مجهولها  $s$  فيوجد

$$s = ٤ \text{ أو } s = ٦$$

فاذا وضع أحد هذين المقدارين وهو ٤ بدلا عن  $s$  في

في معادلة ٢ واختصر الناتج يوجد  $s + v = 5$  وحينئذ يمكن تكوين المجموعة الآتية

$$s + v = 5 \quad \text{و}$$

$$s + v = 5$$

وبحل هذه المجموعة نجد  $s = 4$  و  $v = 1$  أو بالعكس

وإذا وضع المقدار الثاني وهو ٦ دلا عن  $s + v$  في معادلة (٢) يوجد  $s + v = 1$  وحينئذ يمكن تكوين المجموعة الآتية

$$s + v = 6$$

$$s + v = 1$$

$$\text{وبحل هذه المجموعة نجد } s = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \text{ و } v = \frac{\sqrt{13}+1}{2}$$

أو بالعكس

المثال الثامن - حل المجموعة

$$4s^2 + 4s + v + 8s + 4v = 50 - 4s^2 \quad (1)$$

$$2s^2 - 4s - 5 = 0 \quad (2)$$

نحول جميع حدود معادلة (١) للطرف الأول ونرتبها فيحدث

$$4s^2 + 4s + v + 8s + 4v = 50 - 4s^2 \quad \text{أو}$$

$$8s^2 + 12s + 5v = 50$$

وبتحليل الطرف الأول الى عاملين ينتج

$$(2s + 3)(4s + 5v) = 50$$

وحيث ان حاصل ضرب عاملين صفر فيلزم ان يكون أحدهما  
أو كلاهما صفرا فاما أن يكون  $٢ س + ص - ٥ = ٠$  (٣)  
أو  $٢ س + ص + ٩ = ٠$  (٤)

فاذا كنّا مجموعة من معادلتى ٢ و ٣ وهى

$$(٢) \quad ٢ س - ص = ٥$$

$$(٣) \quad ٢ س + ص = ٥$$

وحلت هذه المجموعة بأن استخرج مقدار  $ص$  من معادلة ٣  
ووضع بدلا عن  $ص$  فى معادلة ٢ واختصر الناتج يوجد

$$٠ = ١ + ٢ س$$

ومن هذه المعادلة نجد أن  $س = ١$  وعليه يكون  $ص = ٣$

واذا كنّا مجموعة أخرى من معادلتى ٢ و ٤ وهى

$$(٢) \quad ٢ س - ص = ٥$$

$$(٤) \quad ٢ س + ص = -٩$$

وحلت هذه المجموعة بأن استخرج مقدار  $ص$  من معادلة ٤  
ووضع بدل  $ص$  فى معادلة ٢ واختصر الناتج يوجد

$$٥ = ٥ + ١٨ س$$

$$\frac{147 \pm 9}{0} = \text{ومن هذه المعادلة نجد أن } س =$$

$$\frac{147 \mp 27}{0} = \text{وعلى هذا يكون } ص =$$

٢٣٧ تنبيه - ما تقدم ذكره من الأمثلة كاف للطالب في حل مجموعة ولا مندوحة من استعمال طرق تحيلية أخرى ينتخبها الطالب بالقياس على ما تقدمت ومدار الأمر الحصول على مجموعة يتيسر حلها بما تقدم من القواعد

## تمرين ٦٢

المطلوب حل المجموعات الآتية

|   |   |
|---|---|
| (٧) $٩٩٢٣ = ص٤ + ص٢ + ص٢ + ص٢$                      | (١) $١٤٥ = ص٢ + ص٢$                                     |
| $٣٧ = ص٢ + ص٢ + ص٢$                                 | $١٠ = ص٢ - ص٢$  |
| (٨) $٥١٢٨ = ص٤ + ص٢ + ص٢ + ص٢$                      | (٢) $١٩ = ص٢ - ص٢$                                      |
| $٧٦ = ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢$                            | $٣٨ = ص٢ + ص٢$  |
| $\frac{٤٦١}{٥٧٦} = \frac{١}{ص٢} + \frac{١}{ص٢}$ (٩) | (٣) $٦١ = ص٢ + ص٢$                                      |
| $\frac{٢٩}{٢٤} = \frac{١}{ص٢} + \frac{١}{ص٢}$       | $٣٠ = ص٢$   |
| $\frac{٧}{١٤٤} = \frac{١}{ص٢} - \frac{١}{ص٢}$ (١٠)  | (٤) $١٧٠ = ص٢ + ص٢$                                     |
| $\frac{١}{١٢} = \frac{١}{ص٢} - \frac{١}{ص٢}$        | $١٣ = ص٢$   |
|   | (٥) $٢١٨ = ص٢ - ص٢$                                     |
|   | $٢ = ص٢ - ص٢$   |
|   | (٦) $٤٠٧ = ص٢ + ص٢$                                     |
|   | $١١ = ص٢ + ص٢$  |
|   | (١١) $٠ = ص٢ - ص٢ - ص٢ - ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢$        |
|   | $١٣ = ص٢ - ص٢ - ص٢ - ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢$            |
|   | (١٢) $٣ \frac{١}{٤} = ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢$                |
|   | $٢ \frac{٣}{٤} = ص٢ - ص٢ - ص٢ - ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢ + ص٢$ |

$$(13) \text{ سر }^2 \text{ ص} + 20 = 9 \text{ سر ص}$$

$$\text{سر} + \text{ص} = 0$$

$$(14) \text{ سر }^2 \text{ ص} + \text{سر ص} = 930$$

$$\text{سر} + \text{ص} = 11$$

$$(15) \text{ سر }^2 \text{ ص} + 2(\text{سر} + \text{ص} - \text{سر ص}) = 94$$

$$\text{سر ص} + 2(\text{سر} + \text{ص}) = 24$$

$$(16) 0 \text{ سر }^2 \text{ ص} + \text{سر ص} + \text{سر} 3 - \text{سر} 4 \text{ ص} = 17$$

$$\text{سر ص} - \text{سر} 3 + \text{سر} 4 \text{ ص} = 7$$

$$(17) \text{ سر}^2 + 9 \text{ ص} + 6 \text{ سر ص} - 6 \text{ سر} - 18 \text{ ص} = 27$$

$$8 = 2 \text{ سر ص} - \text{ص}^2$$

$$(18) \text{ سر}^2 - 13 \text{ سر} + \text{ص} - 13 \text{ ص} + 2 \text{ سر ص} + 40 = 0$$

$$0 = 22 - \text{سر} + \text{سر ص} 3$$

### تفسير ٦٣

مسائل محل معادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

(١) محيط غيط مستطيل الشكل ٥٠٠ يارده ومساحته ١٤٤٠٠ يارده مربعة فابعداه

(٢) الفرق بين ضلعي مستطيل ٥ أمتار ومساحته ٧٥٠ مترا مربعا فامقدار بعديه

(٣) مساحتا قطع أرض مربعة الشكل ثلاثون قدانا ومحيط الكبرى يزيد

ثمانين قصبة عن محيط الصغرى فامساحة كل قطعة على حدها

(٤) ماطول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية اذا كان طول الوتر ١٠ أمتار

والفرق بين الضامين متران

(٥) مستقيم أ ب طوله ١٨ سنتيمترا قسم الى جزأين مختلفين ثم أنشئ على كل

منهما مربع فكانت مساحة أكبر المربعين تزيد عن مساحة أصغرهما ٧٢

سنتيمترا مربعا فامقدار كل من الجزأين

(٦) عددان لو أضيف ضعف مربع أصغرهما الى مربع الاكبر كان الناتج ٦٦  
واذا طرح ثلاثة أمثال مربع أصغرهما من مربع الاكبر كان الناتج ٦١  
فأما العددان

(٧) مثلث قائم الزاوية مساحته ٧٢٦ مترا مربعا وطول وتره ٥٥ مترا فأطول  
ضلعي القائمة

(٨) محيط مربع يزيد من محيط مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة الاكبر تزيد عن  
ثلاثة أمثال مساحة الاصغر ٣٢٥ قلما مربعا فأضلع كل مربع منهما

(٩) مستطيل مساحته ٧٥٠ مترا مربعا وإذا زيد طوله مترا ونقص عرضه مترا تزيد  
مساحته أربعة أمتار مربعة فأطول وعرض هذا المستطيل

(١٠) مستطيل مساحته ٣٠٠ متر مربع وقطره ٢٥ مترا فأبعاده

(١١) مجموع مساحتي مربعين ٨٦٢١ مترا مربعا وحاصل ضرب قطريهما ٨٥٤٠  
مترا فأطول ضلع كل منهما

(١٢) عدد مركب من رقين وهو يساوى سبعة أمثال مجموع رقيه ومربع  
هذا المجموع يساوى  $\frac{12}{7}$  من ذلك العدد فأقداره

(١٣) الفرق بين محيطي قطعتي أرض مربعتي الشكل يعادل ربع الفرق بين  
سطحيهما ومجموع المحيطين يساوى ثمانية أمثال الفرق بين محيطيهما فأ  
مساحة كل قطعة منهما

(١٤) ما هما العددان اللذان مجموع مربعيهما ١٨٥ والفرق بينهما ٣

(١٥) عدد مركب من رقين إذا ضرب في رقم الآحاد كان الناتج ٨٤ وإذا ضرب  
بمجموع رقيه في رقم الآحاد أيضا كان الناتج ١٢ فأ هذا العدد

(١٦) مستطيلان مساحة كل منهما ٣٦٠ مترا مربعا والفرق بين طوليهما ٥ أمتار  
وبين عرضيهما ٣٦٦ أمتار فأطول وعرض كل منهما



## النسبة والتناسب

٢٣٨ النسبة هي العدد الناتج من مقارنة كمية بكمية أخرى من نوعها

ولهذه المقارنة كيفيتان الاولى أن تطرح احدى الكيتين من الاخرى غالباً هو النسبة بينهما وتسمى نسبة عددية والمطروح منه يسمى المنسوب والمطروح يسمى المنسوب اليه

مثلاً النسبة العددية بين ٧ و ٥ هي ٧ - ٥ = ٢

والنسبة العددية بين ٥ و ٧ = ٧ - ٥ = ٢

وعموماً النسبة العددية بين  $\alpha$  و  $\beta$  هي  $\alpha - \beta$

الثانية أن تقسم احدى الكيتين على الاخرى فالخارج هو النسبة بينهما وتسمى نسبة هندسية والمقسوم يسمى المنسوب والمقسوم عليه يسمى المنسوب اليه

مثلاً النسبة الهندسية بين ١٢ و ٤ هي ١٢ : ٤ = ٣

و « » « » ٤ و ١٢ هي ١٢ : ٤ =  $\frac{1}{3}$

وعموماً النسبة الهندسية بين  $\alpha$  و  $\beta$  هي  $\frac{\alpha}{\beta}$

ولا فرق في كل ذلك اذا كان مقدار احدى الكيتين أو كلاهما موجباً أو سالباً صحيحاً أو كسرياً جذرياً أو غير جذري

غير أنه اذا كان أحد الحدين غير جذري ( جذراً أصم ) لا يكون مقدار النسبة حقيقياً وإنما يمكن ايجاده بوجه التقريب وفي هذه الحالة تسمى الكيتان غير متناسبتين

مثلا النسبة بين ٢٧ و ٣ هو  $\frac{27}{3} = \frac{134}{3} = ٤٧١٣$  تقريبا  
أعنى أن النسبة المطلوبة محصورة بين  $\frac{٤٧١٣}{١٠٠٠٠}$  و  $\frac{٤٧١٤}{١٠٠٠٠}$

ومن الواضح أنه بإيجاد أرقام اعشارية أكثر عددا في مقدار ٢٧  
نحصل على درجة أقرب للحقيقة وحينئذ فيمكن إيجاد عددين صحيحين  
لاختلف النسبة بينهما عن النسبة المطلوبة الا بمقدار صغير جدا  
بحسب الارادة وما ذكر يستنتج التعريف الآتي

٢٣٩ النسبة العددية بين كيتين هي باقي طرح احدهما من  
الأخرى والنسبة الهندسية بين كيتين هي خارج قسمة احدهما  
على الأخرى

### خواص النسب

٢٤٠ من حيث ان النسبة العددية هي باقي طرح كيتين  
ومعلوم أن باقي الطرح لا يتغير بزيادة الكيتين أو نقصهما بمقدار  
واحد فيمكن أن يقال

لا يتغير النسبة العددية بزيادة الحدين أو نقصهما بمقدار واحد

٠ فالنسبة العددية بين  $د$  و  $هـ$  هي عين النسبة العددية بين  $د \pm هـ$   
٦  $د \pm هـ$

ومن حيث ان النسبة الهندسية هي خارج قسمة كيتين ومعلوم  
أن خارج القسمة لا يتغير بضرب الكيتين في كمية واحدة ولا بقسمة  
على كمية واحدة فيمكن أن يقال

لا تتغير النسبة الهندسية بضرب الحدين في كمية واحدة ولا بقسمتهما على كمية واحدة فالنسبة الهندسية بين  $z$  و  $y$  هي عين النسبة الهندسية بين  $z$  و  $6$  و  $y$  و  $4$  أو بين  $\frac{z}{4}$  و  $\frac{y}{6}$

٢٤١ إذا أضيف لحدى نسبة هندسية كمية واحدة موجبة فيزيد مقدار النسبة أو ينقص على حسب ما تكون النسبة أصغر أو أكبر من الواحد

مثلا إذا أضيف لحدى النسبة  $\frac{1}{b}$  كمية  $s$  ينتج  $\frac{s+1}{s+b}$  وتكون هذه النسبة زائدة عن النسبة  $\frac{1}{b}$  إذا كان  $a > b$  وتكون أقل من  $\frac{1}{b}$  إذا كان  $a < b$

البرهان نبحث عن الفرق بين  $\frac{1}{b}$  و  $\frac{s+1}{s+b}$  فنجد

$$\frac{1}{b} - \frac{s+1}{s+b} = \frac{(b-1)s}{b(s+b)}$$

فإذا كان  $a > b$  يكون الفرق المذكور سالبا وهذا دليل على أن

$$\frac{s+1}{s+b} \text{ يزيد عن } \frac{1}{b}$$

وإذا كان  $a < b$  يكون الفرق المذكور موجبا وهذا دليل على أن

$$\frac{s+1}{s+b} \text{ أقل من } \frac{1}{b}$$

٢٤٢ إذا طرح من حدى نسبة هندسية كمية واحدة موجبة (بحيث لا تزيد عن المنسوب اليه) ينقص مقدار النسبة أو يزيد على حسب ما تكون النسبة أصغر أو أكبر من الواحد

مثلا اذا طرح من حدى النسبة  $\frac{1}{b}$  كمية  $s$  (بفرض  $s > b$ )  
 ينتج  $\frac{1-s}{b}$  تكون هذه النسبة أقل من  $\frac{1}{b}$  اذا كان  $a > b$   
 وتكون زائدة عن  $\frac{1}{b}$  اذا كان  $a < b$ .

البرهان نبحث عن الفرق بين  $\frac{1}{b}$  و  $\frac{1-s}{b}$  فنجد  

$$\frac{1}{b} - \frac{1-s}{b} = \frac{s}{b}$$

فاذا كان  $a > b$  يكون الفرق المذكور موجبا وهذا دليل على ان  
 $\frac{1-s}{b}$  أقل من  $\frac{1}{b}$

واذا كان  $a < b$  يكون الفرق المذكور سالبا وهذا دليل على ان  
 $\frac{1-s}{b}$  يزيد عن  $\frac{1}{b}$

٢٤٣ تنبيه - اذا كانت كمية  $s$  أكبر من  $b$  فيعكس  
 ما تقدم ذكره في البند السابق فيزيد مقدار النسبة اذا كانت أصغر من  
 الواحد وينقص اذا كانت أكبر من الواحد

٢٤٤ يمكن تجنب النسب الهندسية وجمعها وطرحها وضربها  
 وقسمتها بالقواعد التي أجريت على الكسور

### التناسب

٢٤٥ التناسب هو اجتماع نسبتين متساويتين من نوع واحد  
 فاذا كانت النسبة العددية بين  $a$  و  $b$  تساوى النسبة العددية بين  
 $c$  و  $d$  فيتركب من هاتين النسبتين تناسب عددي يكتب عادة هكذا  
 $a : b :: c : d$  وينطبق به نسبة  $c$  الى  $a$  كنسبة  $d$  الى  $b$

واذا كانت النسبة الهندسية بين  $ا$  و  $ب$  تساوى النسبة الهندسية بين  $ح$  و  $د$  فيتركب من هاتين النسبتين تناسب هندسى يكتب عادة هكذا

$$ا : ب :: ح : د \text{ أو هكذا } \frac{ا}{ب} = \frac{ح}{د}$$

وينطق به نسبة  $ا$  الى  $ب$  كنسبة  $ح$  الى  $د$  وما ذكر يستنتج ما يأتى

٢٤٦ التناسب العددى هو اجتماع نسبتين عدديتين متساويتين  
— التناسب الهندسى هو اجتماع نسبتين هندسيتين متساويتين .

٢٤٧ وسواء كان التناسب عدديا أو هندسيا فالحد الاول والرابع يسميان الطرفين والثانى والثالث يسميان الوسيطين والاول والثالث يسميان المقدمين والثانى والرابع يسميان التالين والحد الرابع يسمى الرابع المتناسب للثلاثة الحدود الاخرى

واذا تساوى وسطا التناسب يسمى تناسبيا متصلا أو متواليا

فاذا كان  $ح = د$  و  $ا = ب$  يكتب التناسب هكذا

$$ا : ب :: د : ح \text{ أو بالاختصار هكذا } ا : ب :: د : د$$

والحد  $د$  يسمى الوسط المتناسب العددى بين  $ح$  و  $ا$

واذا كان  $\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{د}$  فيكتب التناسب هكذا

$$ا : ب :: ب : ا \text{ أو بالاختصار } ا : ب :: ب : ا$$

والحد  $ب$  يسمى الوسط المتناسب الهندسى بين  $ا$  و  $ح$

وفى هذه الحالة يقال للحد الرابع الثالث المتناسب العددى أو الهندسى على حسب ما يكون التناسب عدديا أو هندسيا

## خواص التناسب العددي

٢٤٨ الخاصية الاولى - مجموع طرفي التناسب العددي يساوى مجموع وسطيه مثلاً في تناسب  $س : هـ . و$  يكون  $ح + و = س + هـ$  لأن التناسب المفروض يمكن وضعه هكذا  
 $ح - س = هـ - و$  وبتحويل  $س$  للطرف الثاني و  $و$  للاول ينتج  
 $ح + و = س + هـ$  وهو المراد

٢٤٩ نتيجة اذا فرض أن أحد حدود التناسب الاربعة مجهول فيمكن استخراجه اذا علمت الثلاثة حدود الأخرى  
 لأنه يؤخذ من المتساوية السابقة أن  $ح + س = هـ - و$  وان  $س = هـ - و + ح$  وهكذا

أعني أن أحد الطرفين يساوى مجموع الوسطين ناقصا الطرف الآخر وأن أحد الوسطين يساوى مجموع الطرفين ناقصا الوسط الآخر وإذا تساوى الوسطان مثل  $ح . س : س . هـ$  فيكون  
 $س = س + ح - و$  أو  $س = \frac{ح + و}{٢}$

أعني أن الوسط المتناسب العددي يساوى نصف مجموع الطرفين  
 ٢٥٠ الخاصية الثانية - اذا ساوى مجموع كيتين لمجموع كيتين اخرين يتركب من الارباع كيات تناسب عددي طرفاه كيتا أحد المجموعين ووسطاه كيتا المجموع الثاني  
 مثلاً اذا كان  $ح + و = س + هـ$  يكون  $س : هـ . و$

لأنه حيث كان  $ح + و = ز + هـ$  فرضا فاذا حول وللطرف  
الثاني  $و هـ$  للاول ينتج  $ح - ز = هـ - و$  ومن هنا يتركب  
التناسب  $ح : ز :: هـ : و$  وهو المراد

٢٥١ تنبيه - اذا جعلنا الكيتين  $ح و$  طرفين فلنا أن  
نجعل الطرف الاول  $ح$  أو  $و$  فهاتان صورتان وفي كل منهما لنا ان  
نجعل الوسط الاول  $ز$  أو  $هـ$  فيحصل أربع صور وكذا نحصل أربع  
صور أخرى اذا جعلنا الكيتين  $هـ و$  طرفين وحيثذ فيمكن  
أن يتركب من المجموعين ثمانية تناسبات وهى

|                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| $ح : ز :: هـ : و$ | $و : هـ :: ح : ز$ |
| $ح : و :: هـ : ز$ | $و : ز :: هـ : ح$ |
| $و : ح :: هـ : ز$ | $ز : هـ :: و : ح$ |
| $و : ز :: ح : هـ$ | $ز : و :: ح : هـ$ |

والتناسبات الاربعة الاول تفيد أن التناسب لا يتغير بتغيير أحد  
الوسطين بالآخر أو أحد الطرفين بالآخر والتناسبات الاربعة الآخر  
تفيد أن التناسب لا يتغير اذا جعل فيه الطرفان محل الوسطين وبالعكس

### خواص التناسب الهندسى

٢٥٣ الاولى - كل تناسب هندسى حاصل ضرب طرفيه  
يساوى حاصل ضرب وسطيه

مثلا في تناسب  $ا : ب :: ح : ز$  يكون  $ا ز = ب ح$

لان التناسب المفروض يمكن وضعه هكذا

$$\frac{a}{s} = \frac{1}{b} \quad \text{وبحذف المقامين ينتج}$$

$$as = b \quad \text{وهو المراد}$$

٢٥٣ نتيجة اذا جهل أحد حدود التناسب فيمكن استخراجه من المعادلة السابقة لأنه يؤخذ منها أن  $\frac{a}{s} = 1$  و  $\frac{a}{b} = s$  و  $\frac{1}{s} = b$  و  $\frac{1}{b} = a$  أعني أن أحد الطرفين في التناسب الهندسي يساوي حاصل ضرب الوسطين مقسوما على الطرف الآخر وأن أحد الوسطين يساوي حاصل ضرب الطرفين مقسوما على الوسط الآخر

٢٥٤ اذا كان التناسب متصلا مثل  $a : b :: 1 : c$  الذي هو عبارة عن  $a : b :: b : c$  فيؤخذ منه أن

$$ac = b^2 \quad \text{أي } b = \sqrt{ac}$$

أعني أن الوسط المتناسب الهندسي بين كيتين يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضربهما

٢٥٥ الخاصية الثانية - اذا ساوى حاصل ضرب كيتين حاصل ضرب كيتين آخرين تركيب من الكميات الاربع تناسب هندسي طرفاه عاملا أحد الحاصلين ووسطاه عاملا الحاصل الثاني مثلا اذا كان  $as = bc$  فيكون  $a : b :: c : s$

وذلك لأنه حيث كان  $as = bc$  فرضا بقسمة طرفي المتساوية على  $s$  ينتج  $\frac{a}{s} = \frac{b}{c}$  أي  $a : b :: c : s$  وهو المراد



٢٥٦ تنبيه - اذا جعلنا عاملي الحاصل  $أ$  طرفين فلنا أن نجعل الطرف الأول  $أ$  أو  $ب$  فهاتان صورتان وفي كل منهما لنا أن نجعل الوسط الأول  $ب$  أو  $ح$  فيحصل أربع صور وكذا تحصل أربع صور أخرى اذا جعلنا عاملي الحاصل  $ب$  طرفين وحينئذ يمكن أن يتركب من الحاصلين ثمانية تناسبات وتكتب بطريقة مشابهة لما تقدم في التناسب العددي وتراعى فيها الملحوظات السابقة فيه (بمرة ٢٥١)

٢٥٧ الخاصية الثالثة - اذا وجدت نسبة مشتركة في تناسبين هندسيين يمكن أن يتركب من النسبتين الآخرين تناسب

فاذا كان  $أ : ب :: ح : د$

٦  $أ : ب :: ح : د$  و يكون  $ع : د :: هـ : و$

وذلك لان التناسب الأول عبارة عن

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{د} \quad (١) \text{ والثاني عبارة عن}$$

$$\frac{ع}{د} = \frac{هـ}{و} \quad (٢)$$

ومن هاتين المتساويتين يستنتج بداهة أن

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ع}{د} \text{ أى } ع : د :: هـ : و$$

٢٥٨ نتيجة (١) اذا اتحد تناسبان في المقدمات المتناظرة فيتركب من التوالى تناسب

مثلا اذا كان  $أ : ب :: ح : د$  و

$أ : هـ :: ح : و$  يكون  $ب : د :: د : و$

وذلك لأنه التناسب الاول يمكن وضعه كما في نمرة ٢٥٦ هكذا

$$١ : ح :: ب : د \text{ وكذلك التناسب الثاني هكذا}$$

$$١ : ح :: د : هـ \text{ وبموجب نمرة ٢٥٧ ينتج}$$

$$ب : د :: د : هـ \text{ وهو المراد}$$

٢٥٩ نتيجة (٢) اذا اتحد تناسبان في التوالى المتناظرة فيمكن ان يتركب من المقدمات تناسب

$$\text{مثلا اذا كان } ١ : ب :: ح : د \text{ و}$$

$$هـ : ب :: د : و \text{ فيكون } ١ : ح :: ح : هـ \text{ و}$$

ويستدل على ذلك كما في النتيجة الاولى

٢٦٠ الخاصية الرابعة - نسبة مجموع أفاضل الحدين الاولين الى الثانى كنسبة مجموع أفاضل الحدين الآخرين الى الرابع

$$\text{مثلا في تناسب } ١ : ب :: ح : د \text{ يكون } ١ \pm ب : ب :: ح \pm د : د$$

وذلك لأنه يؤخذ من تعريف التناسب أن

$$\frac{١}{ب} = \frac{ح}{د} \text{ فاذا أضيف أو طرح من طرفى هذه المتساوية (١) ينتج}$$

$$\frac{١ \pm ب}{ب} = \frac{١ \pm ح}{د} \text{ أو}$$

$$\frac{١ \pm ب}{ب} = \frac{١ \pm ح}{د} \text{ وهذه المتساوية يمكن أن تكتب هكذا}$$

$$١ \pm ب : ب :: ١ \pm ح : د$$

٢٦١ نتيجة (١) اذا غير موضع الوسيط في التناسب السابق  
يكون

$$\begin{aligned} & \text{أ} \pm \text{ب} : \text{ح} \pm \text{د} :: \text{ب} : \text{د} \quad (١) \text{ ومن التناسب المفروض يؤخذ أن} \\ & \text{أ} : \text{ح} :: \text{ب} : \text{د} \quad \text{وبحذف النسبة المشتركة ينتج} \\ & \text{أ} \pm \text{ب} : \text{ح} \pm \text{د} :: \text{أ} : \text{ح} \quad (٢) \end{aligned}$$

والتناسبان (١) و (٢) يفيدان أن نسبة مجموع أو فاضل الحدين  
الاولين الى مجموع أو فاضل الحدين الآخرين كنسبة الحد الثاني الى  
الرابع أو الاول الى الثالث

٢٦٢ نتيجة (٢) اذا غير موضع الوسيط في التناسب المفروض  
وطبق على الناتج منطق النتيجة الاولى نجد

$$\text{أ} \pm \text{ب} : \text{ح} \pm \text{د} :: \text{أ} : \text{ب} \quad \text{أو} :: \text{ح} : \text{د}$$

اعني أن نسبة مجموع أو فاضل المقدمين الى مجموع أو فاضل التالين  
كنسبة أحد المقدمين الى تاليه

٢٦٣ تنبيه - التناسب  $\text{أ} : \text{ب} :: \text{ح} : \text{د}$  يؤخذ منه بموجب  
النتيجة ٢

$$\begin{aligned} & \text{أن} \quad \text{أ} + \text{ب} : \text{ح} + \text{د} :: \text{أ} : \text{ب} \quad \text{وكذا يؤخذ منه بموجبها} \\ & \text{أن} \quad \text{أ} - \text{ب} : \text{ح} - \text{د} :: \text{أ} : \text{ب} \quad \text{ومن هذين التناسبين ينتج} \\ & \text{أ} + \text{ب} : \text{ح} + \text{د} :: \text{أ} - \text{ب} : \text{ح} - \text{د} \end{aligned}$$

أعني أن نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التالين كنسبة فاضل  
المقدمين الى فاضل التالين

٢٦٤ الخاصية الخامسة - اذا ضربت حدود تناسبات هندسية بعضها في بعض بالترتيب يحدث من الحواصل الاربعة تناسب

مثلا اذا كانت  $a : b :: c : d$

و  $e : f :: g : h$

و  $a : e :: b : f$  فيكون

$a h e : b f g :: c h c : d f g$

وذلك لأن التناسبات المفروضة يمكن أن تكتب هكذا

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f} \quad (١) \quad \frac{c}{d} = \frac{g}{h} \quad (٢) \quad \text{و} \quad \frac{a}{e} = \frac{b}{f} \quad (٣)$$

وبضرب هذه المتساويات الثلاثة بعضها في بعض ينتج

$$\frac{a h e}{b f g} = \frac{c h c}{d f g} \quad \text{أي}$$

$a h e : b f g :: c h c : d f g$  وهو المراد

٢٦٥ تنبيه (١) اذا أخذ التناسب  $a : b :: c : d$  مرات

عددها  $m$  وطبق منعاوق النظارية السابقة على التناسبات الناتجة

يحصل

$$a^m : b^m :: c^m : d^m$$

أعني ان الكميات المتناسبة قواها المتشابهة متناسبة

ويمكن أن يستدل على هذا مباشرة برفع النسبتين المتساويتين

$$\frac{a}{b} \text{ و } \frac{c}{d} \text{ الى درجة } m$$

تنبيه (٢) اذا أخذ التناسب  $ا : ب :: ح : د$  ووضع بالصورة  
 $\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{د}$  وأخذ جذر هذه المتساوية بأى درجة كانت ينتج

$$\frac{\sqrt[n]{ا}}{\sqrt[n]{ب}} = \frac{\sqrt[n]{ح}}{\sqrt[n]{د}}$$

أعنى أن الكميات المتناسبة جذورها المتشابهة  
متناسبة

٢٦٦ الخاصية السادسة - اذا وجدت جملة نسبة متساوية  
يكون نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التوالى كنسبة أى مقدم منها  
الى تاليه

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{د} = \frac{ز}{و} = \frac{هـ}{ط}$$

مثلا اذا كان يكون

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا+ح+ز+هـ}{ب+د+و+ط}$$

وذلك لأنه اذا رمز لمقدار كل نسبة منها بحرف ل يكون

$$ا = ب ل , ح = د ل , ز = و ل , هـ = ط ل$$

وبجمع هذه  
المتساويات ينتج

$$ا + ح + ز + هـ = ب ل + د ل + و ل + ط ل$$

طرفى هذه المتساوية على مكرر ل ثم استعاضة ل باحدى النسب  
وليكن  $\frac{ا}{ب}$  ينتج

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا+ح+ز+هـ}{ب+د+و+ط}$$

وهو المراد

## تمارين ٦٤

(١) اذا كانت النسبة الهندسية بين  $س$  و  $ص$   $= \frac{٣}{٤}$  فأوجد مقدار

$$\frac{النسبة}{\frac{س-٥}{ص-٣} = \frac{س-٥}{ص-٣}}$$

(٢) النسبة بين كيتين هي  $\frac{٥}{٨}$  واذا أضيف ٩ لحدى النسبة كانت النسبة بينهما

$$\frac{٨}{١١} \text{ فاهما الكميّتان}$$

(٣) اذا كانت النسبة بين ١ و ٦ هي مربع النسبة  $\frac{س+١}{ص+٣}$  فبرهن أن

$$س = ١$$

(٤) أوجد الحد المجهول من التناسب ٣٦ :  $س$  :: ٦ : ٥

(٥) » » » » »  $س$  : ٦ ::  $\frac{٥}{٨}$  : ٢

(٦) لمقدار الرابع المتناسب للكميات  $\frac{س}{٧}$  و  $\frac{ص}{٤}$  و  $\frac{س}{٥}$  و  $\frac{ص}{٢}$

(٧) » الوسط المتناسب بين ٣ و ١٢  $س$

(٨) » الثالث المتناسب للكميتين  $\frac{١}{٤} س$  و  $\frac{١}{٦} ص$   $س$

(٩) كيف نستنتج التناسب ٥ : ٣ :: ٦ : ١ من التناسب

$$١ : ٦ :: ٣ : ٥$$

(١٠) كيف نستنتج التناسب ١ : ١ ± ٦ :: ٣ : ٥ ± ٣ من التناسب

$$١ : ٦ :: ٣ : ٥$$

## المتواليات العددية

٢٦٧ المتوالية العددية هي تتابع عدة كميات كل منها تساوى  
التي قبلها مضافا اليها كمية ثابتة تسمى الاساس  
وهذه الكمية الثابتة اما أن تكون موجبة أو سالبة

فالاعداد ١١,٩٧,٥٣ تكون متوالية عديدة تكتب هكذا

$\div 3 \quad 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$  فيكون أساسها ٣ أو تكتب هكذا

$\div 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$  فيكون أساسها ٣ -

وإذا فرض أن كل واحدة من الكميات  $ح و د و ه و و ر$  تساوى سابقتها مضافا إليها كمية ثابتة مثل  $س$  موجبة أو سالبة فإنها تكون متوالية عديدة أساسها  $س$  تكتب هكذا

$\div 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

ونقرأ المتوالية الاولى نسبة ٣ الى ٥ كنسبة ٥ الى ٧ كنسبة ٧ الى ٩ كنسبة ٩ الى ١١ وبمثل هذا نقرأ المتواليات الثانية والثالثة

٣٦٨ يؤخذ من تعريف المتوالية أن الأساس هو باقى طرح أى حد منها من التالى له مباشرة

فى المتوالية  $\div 19 \cdot 25 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$  الأساس ٦

وفى المتوالية  $\div 19 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 5$  الأساس -٦

تنبيه (١) اذا كانت المتوالية مبينة بأعداد فتسمى متوالية تصاعدية اذا كان الأساس موجبا وتسمى متوالية تنازلية اذا كان الأساس سالبا فالمتواليات السابقتان أولاهما تصاعدية والثانية تنازلية

تنبيه (٢) اذا فرض فى المتوالية  $\div 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$  أن الأساس  $س$  ثم عكس وضع هذه الحدود بأن كتب  $\div 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$  فان أساسها يكون -  $س$

وهذا القانون يمكن بواسطته إيجاد مقدار أى حد من حدود المتوالية العددية إذا علم الحد الاول والاساس وترتيب ذلك الحد فيلاحظ أن عدد الترتيب



مثال (١) مامقدار الحـد الاخير من متوالية عديدة حـدها الاول ٧  
وأساسها ٥ وعدد حـدوها ١٢

لذلك نعوض في القانون (١) الحروف بمقاديرها فينتج

$$٦٢ = ٥ \times ١١ + ٧ = ل$$

مثال ٢ - مامقدار الحـد الخامس عشر من المتوالية العـدية

÷ ٧ ٤ ١ ٠٠٠ فهنا الأساس - ٣ وعدد الحدود ٥ هو ١٥

فاذا وضع في قانون (١) بدل الحروف مقاديرها ينتج

$$٣٥ - = ٣ - \times ١٤ + ٧ = ل$$

٢٧٠ تنبيه - القانون (١) السابق يشتمل على أربع كميات

١، ٢، ٣، ٤، و ٥، فاذا علم ثلاث منها أمكن إيجاد الرابعة

(مثال) ماعدد حدود المتوالية التي حـدها الاول ٥ والاخير ٢٣

وأساسها  $\frac{1}{٢}$

نضع في قانون (١) بدل الحروف مقاديرها فينتج

$$٢٣ = ٥ + (١ - \frac{1}{٢}) \times \frac{1}{٢} \text{ وبحل هذه المعادلة نجد}$$

$$١٣ = ٥$$

وقس على هذا اذا جهلت احدى الكميات سه، ر، ا، و، ل وعلمت

الثلاث الباقية

٢٧١ ادخال أواسط عديدة بين كميتين معلومين هو عبارة عن

إيجاد متوالية يكون الحـدان المعلومان طرفين لها والأواسط المطلوبة



ملمقدار الحدد الاول من المتواليات العديدة التي فيها

(٩) الحدد الاخير ٣٣ والاساس  $\frac{1}{4}$  وعدد الحدود ١٢

(١٠) الحدد الثامن عشر ٣ والاساس ٢

(١١) الحدد الخامس — ٣ والاساس — ٢

(١٢) مألئاس المتوالية التي حدها الاول ٩ والاخير ١٩ وعدد حدودها ٩

(١٣) مألئاس المتوالية التي حدها الاول ٩ والاخير ٩ وعدد حدودها ٧

(١٤) ماعدد حدود المتوالية التي حدها الاول ٥ والاخير ٦ والاساس  $\frac{1}{8}$

(١٥) ماعدد حدود المتوالية التي حدها الاول ٢٠ والاخير ٥ والاساس —  $\frac{1}{4}$

(١٦) ادخل عشرة أواسط عديديه بين العددين ٦ و ٦١

(١٧) ادخل خمسة أواسط عديديه بين العددين ٥٠ و ٧

(١٨) ادخل ٢٤ وسطاً عديدياً بين العددين ٥ و ٨٠

(١٩) ادخل ثلاثة أواسط عديديه بين الكميتين ح — هـ ٦ + ٧

(٢٠) ادخل اربعة اواسط عديديه بين الكميتين م — ٦ ٥ + ٢

٢٧٢ مجموع أى حدين من متوالية عديديه كائنين على بعد واحد

من طرفيها يساوى مجموع الطرفين

ففي المتوالية ا . ب . ج . د . هـ . و . ز . ح . ط . ي . ك . ل يكون

$$ل + ا = ح + ب$$

وذلك لأن الحدد ح هو الحدد الثالث من المتوالية المعلومة فانما فرض

ان أساسها سه يكون

$$(١) \quad ح + ا = ٢ + سه$$

والحد ٤ يمكن اعتباره حدا ثالثا من متوالية عددية حدها الاول  
ل وأساسها - س

فيكون  $٤ = ل - ٢ س$  (٢) وجمع المتساوين (١) و٢ ينتج  
 $٥ + ٤ = ١ + ل$  وهو المراد

تنبيه - اذا كان عدد حدود المتوالية فرديا فالحد المتوسط يساوى  
نصف مجموع الطرفين

لأنه اذا رمز بحرف د لترتيب الحد المتوسط و في المتوالية يكون  
 $١ + (١ - د) س = ١ + ل$  ومن عكس المتوالية يكون  
 $١ + ل = (١ - د) س$  وجمع المتساويتين ينتج بعد الاختصار  
 $٢ = ١ + ل$  أو  
 $١ + ل = ٢$

٣٧٣ مجموع حدود أى متوالية عددية يساوى حاصل ضرب  
مجموع طرفيها في نصف عدد الحدود

مثلا في المتوالية  $١ . ٢ . ٣ . ٤ . ٥ . ٦ . ٧ . ٨$   
اذا رمز بحرف ع لمجموع الحدود يكون  $٨ = (١ + ٨) \times ٤$   
وذلك لأن  $٨ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧$  و  
وبعكس المتوالية

يكون  $٨ = ٨ + ٧ + ٦ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١$   
نجم المتساويتين



نستعيز في قانون ٣ المعاليم بمقاديرها فينتج

$$٩٣ = (٨ + ١) \times \frac{7}{1}$$

$$٢٣ = ١$$

المثال الثالث - كم عدد حدود المتوالية التي مجموعها ٣٠٥ والاول منها ٨ والاخير ٥٣

نستعيز في قانون ٣ المعاليم بمقاديرها فينتج

$$٣٠٥ = (٥٣ + ٨) \times \frac{2}{1}$$

$$١٠ = ٥$$

٢٧٥ اذا وضع في قانون ٣ السابق بدل الحد الاخير مقداره المبين بـ ٢٦٩ ينتج

$$٤ = \frac{2}{1} [١٢ + (١ - ٥) \times ٤]$$

وهذا القانون يمكن واسطته ايجاد مجموع حدود المتوالية العددية اذا علم الحد الاول والاساس وعدد الحدود

(مثال) ما مجموع الخمسة عشر حدا الاولى من المتوالية

$$\div ١٣ \cdot ١٦ \cdot ١٩ \cdot \dots$$

نضع في قانون ٤ بدل الحروف المعلومة بمقاديرها فنجد

$$٤ = \frac{15}{1} (٣ \times ١٤ + ١٣ \times ٢)$$

$$٥١٠ = ٤$$

٢٧٦ تنبيه - القانون (٤) يشتمل على أربع كميات وهى

ع و د و ا و سـ

فاذا علمت ثلاث منها أمكن إيجاد الكمية الرابعة ولنبيين ذلك بأمثلة فنقول

المثال الاول - ما مقدار الحد الاول من متوالية عديدة اذا كان

مجموع الخمسة حدود الاولى ٧٠ والاساس ٣

نضع فى قانون ٤ بدل المعاليم بمقاديرها فنجد

$$٧٠ = \frac{٥}{٢} (٣ \times ٤ + ١٢) \text{ ومنه}$$

$$٨ = ١$$

المثال الثانى - ما هى المتوالية المكونة من خمسة حدود مجموعها ٥٥

وأولها ١٧ نستخرج الاساس ولذلك

نستعوض فى قانون ٤ المعاليم بمقاديرها فينتج

$$٥٥ = \frac{٥}{٢} (٢ \times ١٧ + ٤ سـ) \text{ وبحل هذه المعادلة نجد}$$

$$سـ = ٣$$

وحيثئذ فتكون المتوالية  $١٧ \div ١٤ \div ١١ \div ٨ \div ٥$

المثال الثالث - كم حدا تؤخذ من المتوالية  $١٥ \div ١٢ \div ٩ \div ٠٠٩$

ليكون مجموعها ٤٢

نستعوض فى قانون (٤) المعاليم بمقاديرها فيكون

$$٤٢ = \frac{٥}{٢} [ (٣ - ١) + ١٥ \times ٢ ] \text{ او}$$

$$٨٤ = ٣٠ - ٣ + ٣ \text{ او}$$

$$٨٤ = ٣٣ - ٣ \text{ او}$$

$$\begin{aligned} ٣٠٣ - ٣٣ - ٥ - ٨٤ = ٠ \text{ . } & \text{نقسم حدود المعادلة على ٣} \\ ٣٠٣ - ١١ - ٥ - ٢٨ = ٠ \text{ . } & \text{نحال الطرف الاقل الى عاملين} \\ (٣ - ٥)(٧ - ٥) = ٠ \text{ . } & \text{وحيث} \\ ٧ = ٥ \text{ أو } ٧ = ٧ & \end{aligned}$$

وعلى الاول تكون المتوالية  $١٥ \cdot ١٢ \cdot ٩ \cdot ٦ \cdot ٣$  وعلى الثاني  
تكون المتوالية  $١٥ \cdot ١٢ \cdot ٩ \cdot ٦ \cdot ٣ \cdot ٠$  صفر - ٣

٢٧٧ القوانين ١ و ٣ و ٤ تشتمل على خمس كيات فاذا علم  
ثلاث منها أمكن إيجاد الكيتين الأخرين اما بإيجادها كية بعد كية  
بواسطة أحد القوانين المذكورة واما بتكوين مجموعة ذات معادلتين  
وحل هذه المجموعة ولنذكر هنا بعض أمثلة على ذلك فنقول

المثال الاول - الحد الخامس من متوالية هو ٣٠ والحد الخامس  
والعشرين منها هو ١٧٠ والمطلوب إيجاد الحد الاول والاساس

نأخذ قانون (١) الخاص بالحد الاخير ونستبدل فيه أولا  
ل و ٥ - ١ بالمقدارين ٣٠ و ٤ ثم بالمقدارين ١٧٠ و ٢٤ فنجد  
المجموعة

$$(١) \quad ٣٠ = ٤ + ١ \text{ سه}$$

$$(٢) \quad ١٧٠ = ٢٤ + ١ \text{ سه}$$

وبحل هذه المجموعة نجد  $٢ = ١$  و  $٧ = ٣٠$  وتكون المتوالية  
المطلوبة  $٢ \cdot ٩ \cdot ١٦ \cdot ٢٣ \cdot ٣٠ \cdot ٠٠٠$



المثال الثاني - مجموع ثلاثة حدود متتالية من متوالية عددية هو ٢١ وحاصل ضربها هو ٢٣١ فما كل حد من هذه الحدود الثلاثة  
نفرض أن الحد المتوسط منها هو  $\alpha$  والاساس  $\beta$  فيكون  
ما قبل الحد المتوسط هو  $\alpha - \beta$  وما بعده هو  $\alpha + \beta$  ويكون  
مجموع الثلاثة حدود هو  $\alpha - \beta + \alpha + \alpha + \beta = 3\alpha$   
أي أن

$$(1) \quad 21 = 3\alpha$$

ويكون حاصل ضرب الثلاثة حدود المذكورة هو

$$\alpha(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (\alpha - \beta^2)(\alpha + \beta^2) \text{ أي أن}$$

$$(2) \quad 231 = (\alpha - \beta^2)(\alpha + \beta^2)$$

ومن (١) و (٢) تتكوّن المجموعة

$$(1) \quad 21 = 3\alpha$$

$$(2) \quad 231 = (\alpha - \beta^2)(\alpha + \beta^2)$$

ولحل هذه المجموعة نستخرج مقدار  $\alpha$  من معادلة (١) فنجد  
 $\alpha = 7$  ثم نضع هذا المقدار بدلا عن  $\alpha$  في معادلة (٢) فينتج

$$231 = (7 - \beta^2)(7 + \beta^2) \quad \text{أو}$$

$$33 = 7 - \beta^2 \quad \text{وبحل هذه المعادلة نجد}$$

$$\beta^2 = 7 - 33 = -26$$

أعني أن الحد المتوسط  $\alpha$  والاساس  $\beta$  أو -

فاذا كان الاساس ٤ يكون الحد الاول ٧ - ٤ = ٣ والثالث

$$١١ = ٤ + ٧$$

واذا كان الاساس - ٤ يكون الحد الاول ٧ + ٤ = ١١ والثالث

$$٣ = ٤ - ٧$$

المثال الثالث عدد حدود متوالية ١٥ ومجموع الثلاثة حدود المتوسطة

٧٥ ومجموع الثلاثة حدود الاخيرة ١٢٩ فما هي المتوالية

لذلك نستخرج الحد الاول والاساس فيقال الثلاثة حدود المتوسطة هي السابع والثامن والتاسع والثلاثة حدود الاخيرة هي الثالث عشر والرابع عشر والخامس عشر وبناء على قانون (١) يكون

|                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| الحد السابع = ١ + ٦ سـ | الحد الثالث عشر = ١ + ١٢ سـ |
| » الثامن = ١ + ٧ سـ    | » الرابع = ١ + ١٣ سـ        |
| » التاسع = ١ + ٨ سـ    | » الخامس = ١ + ١٤ سـ        |

فيكون مجموع الثلاثة حدود المتوسطة هو ١٣ + ٢١ سـ وحيث

$$(١) \quad ٧٥ = ٢١ سـ + ١٣$$

ويكون مجموع الثلاثة حدود الاخيرة هو ١٣ + ٣٩ سـ وحيث

$$(٢) \quad ١٢٩ = ١٣ سـ + ٣٩$$

وبحل المجموعة المكونة من (١) و (٢) نجد

$$سـ = ٣, ١ = ٤ \text{ وتكون المتوالية}$$

$$\div ٤ \cdot ٧ \cdot ١٠ \cdot ١٣ \cdot \dots$$

وقس على هذه الامثلة

تمارين ٦٦

- (١) ما مجموع الخمسة عشر حدا الاولى من متوالية عديدة حدها الاول ٤ والخامس عشر ٣٢
- (٢) ما مجموع العشرين حدا الاولى من متوالية عديدة حدها الاول ١ والآخر عشرة
- (٣) مجموع ثمانية الحدود الاولى من متوالية عديدة ٢٢٠ وحدها الثامن ٤٥  
فما مقدار الحد الاول
- (٤) ما مقدار الحد الاول من متوالية عديدة اذا كان حدها الثامن ٤ ومجموع الثمانية حدود الاولى منها ٤
- (٥) مجموع خمسة الحدود الاولى من متوالية عديدة هو ٧١ والاول ١١  
فما هو الحد الخامس
- (٦) ما مقدار الحد العاشر من متوالية عديدة حدها الاول ١٥ ومجموع العشرة حدود الاولى منها ٦٠
- (٧) مجموع حدود متوالية عديدة ١٩٥ والحد الاول منها ٢ والآخر ٤٠ فكم عدد حدودها
- (٨) كم عدد حدود المتوالية العديدة التي مجموع حدودها ١٠ وحدها الاول ١٠ والآخر ٦ —
- (٩) ما مجموع حدود المتوالية  $\div ٤٢ \cdot ٣٩ \cdot ٣٦ \dots$  الى الحد العاشر
- (١٠)  $\div ١٦ \cdot ١٠ \cdot ٤ \dots$  الى الثاني عشر
- (١١) مجموع خمسة الحدود الاولى من متوالية عديدة هو ٣٥ وأساسها ٢ فما هو الحد الاول
- (١٢) مجموع ستة الحدود الاولى من متوالية هو ٤٠ وأساسها ٣ فما مقدار الحد الاول
- (١٣) الحد الاول من متوالية عديدة ١ ومجموع خمسة الحدود الاولى منها ٥٥ فما مقدار الأساس
- (١٤) الحد الاول من متوالية عديدة هو ١٢ ومجموع خمسة الحدود الاولى ٣٥ فما مقدار الأساس

(١٥) ماعدد الحدود التي تؤخذ من المتوالية  $\div ٣٩ \cdot ٣٦ \cdot ٣٣ \cdot ٠٠٠٠٠$  ليكون مجموعها ٢٧٣

(١٦) ماعدد الحدود التي يلزم أخذها من المتوالية  $\div ١٦ \cdot ٠ - ١٥ \cdot ٠ - ١٤ \cdot ٠٠٠$  ليكون مجموعها ١٠٠

(١٧) ما مقدار الحد الاول والأساس من المتوالية العددية التي حدها الخامس عشر ٢٥ والتاسع والعشرون ٤٦

(١٨) ما مقدار الحد الاول والأساس من المتوالية التي حدها الخامس واحد والسادس والثلاثون ٧٧

(١٩) مجموع ثلاثة حدود متتالية من متوالية عددية هو ٢٤ وحاصل ضربها ٤٤٠ فكل من هذه الحدود الثلاثة

(٢٠) مجموع ثلاثة حدود متتالية من متوالية عددية هو ٦ وحاصل ضربها ٢٤ فاهذه الحدود الثلاثة

(٢١) مجموع الثلاثة حدود المتوسطة من متوالية عددية هو ٤٢ ومجموع الثلاثة حدود الأخيرة ١٣٢ وعدد حدودها ١٣ والمطلوب إيجاد الحد الاول والأساس

(٢٢) مجموع الثلاثة حدود المتوسطة من متوالية عددية هو ١٥ ومجموع الثلاثة حدود الأخيرة ٣ وعدد حدودها ١٥ والمطلوب تكوين هذه المتوالية

(٢٣) ما مجموع الأعداد الصحيحة من واحد الى ألف

(٢٤) مجموع ثلاثة أعداد مكونة لمتوالية عددية هو ٣٩ وحاصل ضربها ٢١٨٤ فاهذه الثلاثة أعداد

(٢٥) بين أن مجموع جملة أعداد فردية متتالية مبتدأة بالواحد وعددها م يساوي  $\frac{m^2}{2}$

(٢٦) خبول محتانة الاثمان ثمن كل حصان يزيد من الاقل منه ثمنا بمقدار ٣٣٠ قرشا وأقل الاثمان ٧٥٠ قرشا فما ثمن الحصان الخامس عشر

(٢٧) فرقة من العملة اتفقت مع شخص على حفر ثمر بأجرة المذراع الاول في العتق ١٠ قروش وأن تزد أجرة كل ذراع من سابقه بمقدار ٥ قروش فامقدار ما تستحقه الفرقة اذا بلغ عتق البئر ١٦ ذراعا

(٢٨) مامقدار الدين الذي يمكن تسديده في مدة ١٢ سنة اذا دفع للذاتين منه في السنة الاولى ٤٠٠ فرنك وفي الثانية ٥٠٠ فرنك وهكذا بزيادة ١٠٠ فرنك في كل سنة من سابقتها

(٢٩) وفر رجل من ايراده مبلغ ٤٠٥٠ فرنك في مدة ١٥ سنة فوفر في السنة الاولى ٢٠٠ فرنك وكان توفيره في كل سنة يزيد من سابقتها بمقدار ثابت والمطلوب معرفة مقدار زيادة الوفر السنوى

(٣٠) شخص ابتداء في الخدمة بمرتب سنوى ١٤٤ جنبها ويزيد مرتبه السنوى ٢٤ جنبها بعد كل سنتين ويحصل منه ٥ ٪ من مرتبه لهامش التقاعد فامقدار ما يصل اليه مرتبه السنوى اذا خدم ٢٠ سنة وما مقدار ما يحصل منه في هذه المدة

### المتواليات الهندسية

٣٧٨ المتوالية الهندسية هي كيات متتابعة كل منها تساوى سابقتها مضروبة في كمية ثابتة تسمى الأساس

والأساس اما أن يكون كمية صحيحة أو كسرية موجبة أو سالبة

فالكميات ٣، ٦، ١٢، ٢٤ تكون متوالية هندسية تكتب هكذا

$$3 : 6 : 12 : 24 \text{ وأساسها } 3$$

والاعداد ١ و  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{16}$  و  $\frac{1}{64}$  تكون متوالية هندسية تكتب هكذا

$$1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} \text{ وأساسها } \frac{1}{4}$$

واذا فرض أن كلا من الكميات  $ح$  و  $د$  و  $هـ$  و  $و$  و  $ز$  تساوى  
سابقها مضروبة فى كمية ثابتة مثل  $س$  (محيحة أو كمرية موجبة  
أو سالبة) فانها تكون متوالية هندسية تكتب هكذا

$$\text{:: } ح : د : هـ : و : ز$$

وتقرأ المتوالية الاولى نسبة ٣ الى ٦ كنسبة ٦ الى ١٢ كنسبة ١٢ الى ٢٤  
الى ٢٤ وبمثل هذا تقرأ المتوالتان الثانية والثالثة

**٢٧٩** يؤخذ من تعريف المتوالية الهندسية أن الاساس عبارة  
عن خارج قسمة أى حد منها على الحد الذى قبله مباشرة

ففى المتوالية  $\text{:: } ٥ : ١٠ : ٢٠ : ٤٠$  الاساس  $\frac{١٠}{٥} = ٢$

وفى المتوالية  $\text{:: } ٤٥ : ١٥ : ٥ : \frac{٢}{٣}$  الاساس  $\frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$

**٣٨٠** اذا رمز للحد الاول بحرف  $ا$  والاساس بحرف  $س$  فبناء  
على تعريف المتوالية الهندسية يكون

$\text{:: } ا : اس : اس^٢ : اس^٣ : اس^٤$  وبالتأمل فى هذا الوضع  
يشاهد أن كل حد هو عبارة عن الحد الاول مضروبا فى قوة من قوى  
الاساس مبنية برتبة هذا الحد ناقصا واحدا واذا رمز للحد الاخير بحرف  $ل$   
ولعدد الحدود بحرف  $ن$  يكون

$$ل = اس^{ن-١} \quad (١)$$

وهذا القانون يمكن بواسطته إيجاد مقدار أى حد من حدود المتوالية  
الهندسية اذا علم الحد الاول والاساس وترتيب الحد

مثال (١) الحد الاخير من متوالية هندسية حدها الاول ٣ وأساسها ٢ وعدد حدودها ٥ هو

$$48 = 3 \times 2^4$$

مثال (٢) الحد الرابع من المتوالية التي حدها الاول ٣ وأساسها

$$\frac{1}{4} - \text{هو } \frac{1}{4} - = \left( \frac{1}{4} - \right) \times 3 = \frac{1}{4}$$

مثال (٣) الحد السادس من المتوالية  $\therefore 32 : 8 : 2 : \dots$

$$\left( \frac{1}{32} \right) \text{ هو } \left( \frac{1}{8} \right) \times 32 = \frac{1}{32}$$

٢٨١ تنبيه - قانون (١) السابق يشتمل على الاربع كميات

١، ٢، ٣، و ٤ فاذا علم ثلاث منها أمكن ايجاد الرابعة

$$\text{فاذا كان المجهول ١ فيستخرج منه ٢} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\text{واذا كان المجهول ٢ فيستخرج منه ٣} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\text{واذا كان المجهول ٣ فيؤخذ من ذلك القانون ١ أن}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 \text{ ثم يؤخذ لو غار يتم الطرفين}$$

فيكون لول - لوا = (١ - ٢) لوس يقسم الطرفين على لوس

$$\frac{\text{لول} - \text{لوا}}{\text{لوس}} = \frac{1 - 2}{1} \text{ أو}$$

$$1 + \frac{\text{لول} - \text{لوا}}{\text{لوس}} = 0$$

تطبيق ماعدد حدود المتوالية اذا كان حدها الاول ٥ والاخير ١٢٠ ٥

والأساس ٢

نضع في القانون السابق بدل الحروف مقاديرها فينتج

$$\textcircled{2} = \frac{٥١٢٠٠ - ٥٠}{٢} + ١ \text{ وبايجاد مقادير هذه اللوغارتمات}$$

$$\text{ينتج} \textcircled{2} = \frac{٠.٢٦٩٨٩٧ - ٣.٢٧٠٩٢٧}{٠.٣٠١٠٣} + ١ \text{ أو}$$

$$\textcircled{2} = ١١$$

٣٨٣ ادخال أواسط هندسية بين كيتين معلومتين هو عبارة عن تكوين متوالية هندسية طرفاها الكيتان المعلومتان وعدد حدودها يساوى عدد الأواسط زائدا اثنين

فلادخال أواسط هندسية عددها ط بين الكيتين ح و ب تكون متوالية هندسية حدها الاول ح والاخير ب وعدد حدودها ط + ٢

ولذلك نستخرج الاساس بان يوخذ قانون ( ١ ) من نمرة ٢٨٠ وهو ل = ا سر<sup>١-٢</sup> وتستعاض فيه الكميات ل و ا ب و ١ - ١ بالكميات ح و ب و ط + ١ فينتج

$$ح = ب سر ط + ١ \text{ ومنه}$$

$$سر = \frac{ط + ١}{\frac{ب}{ح}}$$

أعني أن الاساس يساوى خارج قسمة الكيتين المعلومتين مأخوذا جذره بدرجة تساوى عدد الأواسط زائدا واحدا



تطبيق - المطلوب ادخال أربعة أواسط هندسية بين الكيتين  
١٦٠ و ٥ لذلك نعوض في مقدار الاساس السابق بيانه الحروف  
بمقاديرها فينتج

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{32} \sqrt[5]{\phantom{x}} = \frac{1}{160} \sqrt[5]{\phantom{x}} = \text{سه}$$

وتكون الاواسط هي ٨٠ و ٤٠ و ٢٠ و ١٠

٢٨٣ ايجاد مجموع حدود متوالية هندسية - اذا فرض أن الحد  
الاول من المتوالية ١ وأساسها سه وعدد حدودها ٥ ورمز لمجموع  
الحدود بحرف ع يكون

$$\begin{aligned} \text{ع} &= ١ + ١\text{سه} + ١\text{سه}^2 + ١\text{سه}^3 + \dots + ١\text{سه}^{٥-١} \\ &+ ١\text{سه}^{٥-٢} \quad (١) \text{ وبضرب طرفي هذه المتساوية في الاساس ينتج} \\ \text{ع سه} &= ١\text{سه} + ١\text{سه}^2 + ١\text{سه}^3 + \dots + ١\text{سه}^{٥-٢} \\ &+ ١\text{سه}^{٥-١} + ١\text{سه}^٥ \quad (٢) \end{aligned}$$

وبطرح متساوية (١) من (٢) مع الاختصار يحدث

$$\text{ع} (١ - \text{سه}) = (١ - \text{سه}^٥) \quad \text{نقسم الطرفين على } ١ - \text{سه}$$

$$\text{فينتج ع} = \frac{١ - \text{سه}^٥}{١ - \text{سه}} \quad (٢)$$

وبواسطة هذا القانون يحسب مجموع حدود المتوالية الهندسية

وحيث ان  $ل = ا$  سر  $١-٥$  فيمكن كتابة قانون (٢) هكذا

$$ع = \frac{١-ل}{١-سر}$$

وهو وضع مفيد في بعض الاحوال

٢٨٤ تنبيه (١) اذا غيرنا اشارات البسط والمقام في قانون (٢)

$$(٣) \quad ع = \frac{١-(١-سر)}{سر-١}$$

ومن الموافق استعمال قانون (٣) في ايجاد مجموع الحدود مالم يكن الاساس موجبا واكبر من الواحد

مثال (١) المطلوب ايجاد مجموع ستة الحدود الاولى من المتوالية

$$\therefore ٥ : ١٥ : ٤٥ \dots$$

نستعمل قانون (٢) ونلاحظ أن الاساس ٣ فينتج

$$ع = \frac{(١-٣)٥}{١-٣} = \frac{٧٢٨ \times ٥}{٣} = ١٨٢٠$$

مثال (٢) المطلوب ايجاد مجموع خمسة الحدود الاولى من المتوالية

$$\therefore ٤٨ : ٢٤ : ١٢ : ٠٠٠٠$$

هنا الاساس  $\frac{١}{٣}$  فيستعمل قانون ٣ ومنه ينتج

$$ع = \frac{[٤٨ (\frac{١}{٣})^٥ - ١]}{\frac{١}{٣} - ١} \quad \text{أو}$$

$$ع = ٩٣$$

مثال (٣) المطلوب إيجاد مجموع سبعة الحدود الاولى من المتوالية

$$\therefore \frac{3}{5} : - 1 : \frac{5}{3} : 0000$$

هذا الاساس - 1 :  $\frac{3}{5} = - \frac{5}{3}$  فيستعمل قانون ٣ ومنه ينتج

$$\text{او} \quad \frac{[\frac{3}{5}(\frac{5}{3} - 1) - 1]}{(\frac{5}{3} - 1)} = ع$$

$$\text{أو} \quad \frac{(\frac{78120}{2187} - 1) \frac{3}{5}}{\frac{5}{3} + 1} = ع$$

$$\text{أو} \quad \frac{(\frac{78120}{2187} + 1) \frac{3}{5}}{\frac{8}{3}} = ع$$

$$\text{او} \quad \frac{3}{8} \times \frac{80312}{2187} \times \frac{3}{5} = ع$$

$$8 \frac{319}{1610} = ع$$

٢٨٥ تنبيه (٢) تقدم أن مجموع حدود المتوالية الهندسية يمكن

ان يبين بالقانون  $\frac{(1 - r^n)}{1 - r} = ع$  وهذا القانون يمكن

$$\text{وضعه هكذا} \quad ع = \frac{1}{1 - r} - \frac{1}{1 - r^n}$$

فاذا فرضنا أن  $r$  كسر أقل من الواحد يشاهد أنه كلما زادت

$$\text{كمية } \frac{1}{1 - r^n} \text{ تصغر قيمة } r^n \text{ وعلى هذا تصغر قيمة } \frac{1}{1 - r^n}$$

فاذا زادت كمية  $\frac{1}{1 - r^n}$  تدريجياً بكيفية مستمرة يكبر الفرق بين الكسرين

شياً فشيئاً ويقرب من المقدار  $\frac{1}{1 - r}$  ويكون عند النهاية مساوياً له

$$\text{أى أن} \quad ع = \frac{1}{1 - r} \quad (٤)$$

أعنى أن مجموع حدود متوالية الهندسية تنازلية غير متناهية في عدد الحدود يساوى خارج قسمة حدها الاول على باقى طرح الاساس من الواحد

مثال (١) ليكن المطلوب ايجاد مجموع حدود المتوالية

$$\therefore 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \dots$$

نضع فى قانون ( ٤ ) بدل الحروف مقاديرها فنجد

$$2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = 2$$

مثال (٢) المطلوب ايجاد مقدار الكسر  $0,27$

يلاحظ أن هذا الكسر عبارة عن  $\frac{27}{100} + \frac{27}{1000} + \frac{27}{10000} + \dots$  وهكذا الى ما لا نهاية فهو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية غير متناهية حدها الاول  $\frac{27}{100}$  وأساسها  $\frac{1}{10}$  فاذا رمز لمجموع حدودها بحرف ع نجد بناء على قانون (٤)

$$\frac{27}{99} = \frac{99}{100} : \frac{27}{100} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{1}{10} - 1} = 27$$

وهذا هو المقدار المقرر فى علم الحساب

مثال (٣) المطلوب إيجاد مقدار الكسر  $\dot{0},\dot{4}\dot{2}\dot{7}$ .

يلاحظ أنه عبارة عن  $\frac{٢٧}{١٠٠٠٠٠٠} + \frac{٢٧}{١٠٠٠٠٠} + \frac{٢٧}{١٠٠٠} + \frac{٤}{١}$  وهكذا الى ما لا نهاية أى  $\frac{٤}{١}$  مضافا الى مجموع حدود متوالية هندسية غير متناهية حدها الاول  $\frac{٢٧}{١٠٠٠}$  وأساسها  $\frac{١}{١٠}$  ويكون

$$\dot{0},\dot{4}\dot{2}\dot{7} = \frac{٢٧}{١٠٠٠} + \frac{٤}{١} = \frac{\frac{٢٧}{١٠٠٠}}{\frac{١}{١٠} - ١} + \frac{٤}{١} = \frac{٢٧ + ٩٩ \times ٤}{٩٩٠} = \frac{٤٢٣}{٩٩٠}$$

وإذا لاحظنا أن  $١٠٠ - ١ = ٩٩$  يكون

$$\dot{0},\dot{4}\dot{2}\dot{7} = \frac{٤ - ٤٢٧}{٩٩٠} = \frac{٢٧ + ٤ - ٤٠٠}{٩٩٠} = \frac{٢٧ + ٤(١ - ١٠٠)}{٩٩٠}$$

وهو عين القانون المعروف في علم الحساب

### تمرين ٦٧

- (١) ما مقدار الحد العاشر من المتوالية  $\ddot{0} : ١٠ : ٢٠ \dots$
- (٢) « » « الثاني عشر » «  $\ddot{81} : ٢٧ - ٩ : ٠٠٠٠$
- (٣) « » « الترتيبه ح » «  $\ddot{3} : ٣ : ٣٠٠٠$
- (٤) « » « الاول من متوالية هندسية حدها العاشر ٣٨٤ وأساسها ٢ »
- (٥) « » « » « السابع  $\frac{١}{٦٤}$  والاساس  $\frac{١}{٢}$  »
- (٦) إذا كان الحد الاول من متوالية  $\frac{١}{٢٧}$  والحد العاشر ٧٢٩ فما مقدار الاساس
- (٧) ما عدد حدود المتوالية الهندسية التي حدها الاول  $\frac{١}{٤}$  والاخير ١٠٢٤ وأساسها ٤
- (٨) أدخل أربعة أواسط هندسية بين ٤٨٦ و ٢

- (٩) أدخل ستة أواسط هندسية بين ٥٦ و  $\frac{7}{16}$   
 (١٠) مامقدار مجموع ستة الحدود الأولى من المتوالية  $\frac{1}{3} : 1 : 3 : 6 : 10 : 15$   
 (١١) مامقدار مجموع ثمانية الحدود الأولى من المتوالية  $\frac{1}{4} : 1 : 4 : 9 : 16 : 25 : 36 : 49$   
 (١٢) مامقدار مجموع عشرة الحدود الأولى من المتوالية  $\frac{1}{5} : 1 : 5 : 10 : 15 : 20 : 25 : 30 : 35$   
 (١٣) مامقدار مجموع الاثني عشر حدا الأولى من المتوالية  $\frac{1}{6} : 1 : 6 : 12 : 18 : 24 : 30 : 36 : 42 : 48 : 54 : 60 : 66$   
 (١٤) مامجموع حدود للمتوالية الهندسية غير المنتهية  $\frac{1}{7} : 1 : 7 : 49 : 343 : 2401 : 16807 : 117649 : 823543 : 5724337 : 39810100 : 278397273 : 1948717143 : 137203090721 : 9688759955441 : 672905294535401 : 471435890607714561 : 332345096949761000001 : 23436096010082708651169 : 1667988097199664428551761 : 118813726019522655919661 : 83929636994991994441 : 5923465399649439511 : 41864257797546073 : 2950500045828229 : 2075350032079761 : 147253502245693 : 10307750157200 : 7217425110000 : 5052197500000 : 3536538250000 : 2475576750000 : 1732903750000 : 1213231250000 : 848736250000 : 594779375000 : 417371062500 : 292160793750 : 204512566875 : 143223201875 : 100256251312 : 70180176337 : 49128733097 : 3438413364 : 2412866688 : 1687966691 : 1181576644 : 827103699 : 579402464 : 405581728 : 283907264 : 198735168 : 139114624 : 97368256 : 68160176 : 47712128 : 33398496 : 23379344 : 16371648 : 11460160 : 8022336 : 5615648 : 3951008 : 2765760 : 1932640 : 1352800 : 947000 : 662857 : 466326 : 326428 : 228499 : 160356 : 111573 : 77916 : 54541 : 38199 : 26539 : 18577 : 12994 : 8996 : 6297 : 4388 : 3071 : 2150 : 1494 : 1036 : 715 : 499 : 344 : 239 : 166 : 115 : 79 : 54 : 37 : 25 : 17 : 11 : 7 : 4 : 3 : 2 : 1$

أو جد مقادير كل من الكسور الآتية

- (١٧) سكون المتوالية الهندسية التي حدها العاشر ٣٢٠ والسادس ٢٠  
 (١٨) » » » » » الخامس  $\frac{27}{16}$  والتاسع  $\frac{1}{3}$   
 (١٩) » » » » » السابع ٦٢٥ والرابع ٥  
 (٢٠) دكان لعب وأدوات للأطفال بها أشياء مرتبة الاثمان ترتيباً تدريجياً فمن الشيء من النوع الاول ٢٥ مليم ومن الثاني ٥ مليمات ومن الثالث ١٠ مليمات وهكذا بالتضعيف فثمان شئتين من النوع الثالث وثلاثة أشياء من النوع السادس وصنف من النوع العاشر  
 (٢١) ابتداءً شخص في التجارة برأس مال قدره ٧٥٠٠ جنيه وكان يجد ان ماله في آخر كل سنة قد زاد بقدر  $\frac{1}{10}$  ما يكون في أول السنة فما مقدار ما وصل اليه ماله في نهاية عشر سنين

(٢٢) ثمخص قبل أن يبيع بيته المشيد بمبلغ ١٢٥ بشرط أن يأخذ من المشتري غير ذلك مليما واحدا في أول يوم من الشهر ومليمين في اليوم الثاني وأربع مليمات في اليوم الثالث وهكذا الى آخر الشهر الذي كان مقداره ٣٠ يوما فما مقدار ثمن المنزل (٢٣) اذا فرض أن حبة القمح لو زرت ينتج منها ٥٠ حبة ولو زرت الحمسون حبة ينتج من كل منها ٥٠ حبة وهكذا لمقدار عدد القمح المتحصل من ذلك في نهاية اثنى عشرة سنة

### التراتب والتبديل والتوافق

٢٨٦ اذا فرضت أشياء عددها م فانه يطلق اسم تراتب هذه الاشياء نونا نونا على الجمل المختلفة التي يمكن تكوينها من هذه الاشياء يأخذها نونا نونا بجميع الكيفيات الممكنة من حيث الانتخاب والوضع فيختلف كل ترتيبين اما بجنس شئ واحد على الاقل واما بوضع بعض هذه الاشياء

فاذا رمز لثلاثة أشياء مختلفة بالحروف ا و ب و ح فتراتبها مثنى هي الجمل التي تنشأ من أخذ كل حرفين مرة وملاحظة اختلاف وضعهما فيكون

ا ب و ا ح و ب ح و ا و ب و ب و ح و ح و ا و ح و ب

وكيفية ذلك أننا كتبنا الحرف الاول ا وبعده ب مرة و ح مرة أخرى ثم كتبنا الحرف الثاني ب وبعده ا مرة و ح مرة أخرى ثم كتبنا الحرف الثالث ح وبعده ا مرة و ب مرة أخرى

فكل ترتيبين مختلفان اما في الحرفين المكونين لهما أو في ترتيب وضعهما  
واذا رمز لاربعة أشياء بالحروف ا ب و ح و د فترتيبها  
ثلاثي هي الجمل التي تنشأ من أخذ كل ثلاثة حروف معا وملاحظة  
اختلاف أوضاعها فيكون

ا ب ح و ا ب د و ا ب ح و ا ب د و ا ب ح و ا ب د و  
ب ا ح و ب ا د و ب ا ح و ب ا د و ب ا ح و ب ا د و  
ح ا ب و ح ا د و ح ا ب و ح ا د و ح ا ب و ح ا د و  
د ا ب و د ا ح و د ا ب و د ا ح و د ا ب و د ا ح و

وكيفية ذلك أننا كتبنا الحرف ا مشتركا مع كل واحد من الترتيب  
مثنى للحروف ب و ح و د ثم كتبنا الحرف ب مشتركا مع كل واحد  
من الترتيب مثنى للحروف ا و ح و د وهكذا كتبنا الحرفين ح و د  
وكل واحد من هذه الترتيب يخالف غيره اما في حرف أو في موضع  
حرف على الأقل

وعلى العموم اذا رمز لعدد الاشياء كلها بحرف م ولعدد الاشياء  
المكونة لكل ترتيب بحرف ن تبين الترتيب بالرمز  $\text{م}^{\text{ن}}$

٢٨٧ ايجاد عدد الترتيب - اذا فرضت أشياء عددها م مبينة  
بحروف فمن الواضح أن ترتيبها واحدا واحدا يؤدي الى ترتيب عددها م  
فيكون  $\text{م}^{\text{م}} = \text{م}$

ولايجاد عدد ترتيب هذه الحروف مثنى يقال اذا جعل حرف  
منها هو الاول فانه يتركب منه ومن كل واحد من الحروف



الانحرى التى عددها ٢ - ١ ترتيب عددها ٢ - ١ ومن حيث انه  
يمكن أن يجعل كل حرف من الحروف التى عددها ٢ هو الاول  
فيتكون بهذا الاعتبار ترتيب عددها ٢ (٢ - ١) أى

$$٢ = ٢ (٢ - ١)$$

ولايجاد ترتيب هذه الحروف ثلاثى يقال اذا جعل حرف منها  
هو الاول وكتب بعده على التوالى الترتيب مثنى للحروف التى عددها  
٢ - ١ فنحصل على ترتيب بقدر عدد الترتيب مثنى المذكورة  
وحيث ان عدد الترتيب مثنى للحروف التى عددها ٢ - ١  
هو (٢ - ١) (٢ - ٢) فيكون هذا المقدار هو عدد الترتيب  
التي فيها أحد الحروف هو الاول وحيث انه يمكن الحصول على  
مقدار هذه الترتيب عند الابتداء بكل حرف من الحروف التى عددها ٢  
فيكون عدد الترتيب ثلاثى هو

$$٢ = ٢ (٢ - ١) (٢ - ٢)$$

وبالاستمرار على ذلك يرى أن الترتيب رباعى لحروف عددها ٢  
يبين بالمقدار ٢ (٢ - ١) (٢ - ٢) (٢ - ٣)  
وبالتقاس على ذلك يوجد عدد الترتيب خمسة خمسة ومئة  
سته وهكذا

$$١٢٠ = ٢ = ٢ \times ٤ \times ٥$$

وليان أن هذه القاعدة حقيقية مهما كان عدد الحروف الكلية  
وعدد الحروف التى تؤخذ فى كل ترتيب يقال

إذا فرض تكوين الترتيب نونا نونا لحروف عددها م فلا بد أن يوجد في هذه الترتيب جملة ترتيب مبتدأة بحرف مخصوص والترتيب التي تبدأ بهذا الحرف تتألف منه ومن ترتيب الحروف التي عددها م - ١ ويشتمل كل منها على حروف عددها م - ١ - ١ وحينئذ فعدد الترتيب التي تبدأ بهذا الحرف المخصوص هو عين عدد هذه الترتيب ويبين بالرمز  ${}^{1-2}{}^1$  م - ١ - ١ وحيث أنه يمكن إيجاد مثل هذه الترتيب مع كل حرف من الحروف التي عددها م باعتباره هو الأول فيكون عدد الترتيب كلها هو  ${}^{1-2}{}^1$  م - ١ - ١ أي

$${}^{1-2}{}^1 \text{ م } = {}^{1-2}{}^1 \text{ م}$$

وهذا القانون حقيق مهما كان م ، و ١ فإذا وضع فيه بدل م ، و ١ على التوالي م - ١ ، و ١ - ١ ، ثم م - ٢ ، و ٢ - ١ ، وهكذا بطرح ١ و ٢ و ٣ ، ، ، ، إلى ١ - ١ (١) ينتج

(١) لاحظ أن لا يطرح من م عدد مساو له حتى لا ينعدم وحينئذ فأكبر عدد يمكن طرحه من م هو م - ١ أفق أن أقل مقدار يعطى إلى م هو م - (١ - ١) = م - ١ + ١ وهذا عبارة من أخذ حرف واحد في كل ترتيب ويقابله في كمية م المقدار م - (١ - ١) أي م - ١ + ١ والوضع الذي قبله هو م - (٢ - ١) = م - ٢ + ١ ويقابله م - ٢ + ١

$$\begin{aligned}
 1 - \sqrt[2]{2} &= \sqrt[2]{2} \\
 \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2} (1 - \sqrt[2]{2}) &= \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2} \\
 \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2} (2 - \sqrt[2]{2}) &= \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 1 + \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2} (2 + \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2}) &= \sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2} \\
 1 + \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2} &= \sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2}
 \end{aligned}$$

فاذا ضربت هذه المتساويات بعضها في بعض طرفا بطرف ثم قسم طرفا المتساوية الناتجة على عوامل الطرف الاولى ماعدا العامل الاول منها ينتج

$$(1) \quad 1 - \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{2} \quad (1 - \sqrt[2]{2})(2 - \sqrt[2]{2})(2 + \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2}) \dots (1 + \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{2})$$

أعني أن عدد الترتيب لاشياء مختلفة مهما كان عددها بحيث يشتمل كل منها على أشياء منها بقدر ما يراد يساوى حاصل ضرب عوامل بقدر عدد الاشياء المأخوذة في كل ترتيب وهذه العوامل هي أعداد متتالية أكبرها بقدر عدد الاشياء جميعها

$$\text{فعلى هذا يكون } 5 \times 4 \times 3 = 60$$

مثال (١) ثلاثة أشخاص دخلوا عربة سكة حديدية بها ستة محلات خالية فيكم كيفية يمكن أن يجلسوا بهذه المحلات

عدد الكيفيات المطلوبة هو عبارة عن عدد الترتيب ثلاثى لستة أشياء

$$١٢٠ = ٤ \times ٥ \times ٦ \quad \text{أى}$$

مثال (٢) كم عدد مركب من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الارقام التسعة البسيطة

الاعداد المطلوبة هى عبارة عن الترتيب مثنى لتسعة أشياء فعددها

$$٧٢ = ٨ \times ٩$$

مثال (٣) ماعدد الاعداد التى يمكن تكوينها باستعمال ستة أرقام مختلفة من الارقام التسعة البسيطة

الاعداد المطلوبة هى عبارة عن الترتيب ستة فستة لتسعة أشياء

$$٦٠٤٨٠ = ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \quad \text{فعددها}$$

٢٨٨ التباديل - يطلق اسم تباديل لاشياء عددها م على الجمل المختلفة التى يمكن تكوينها من هذه الاشياء بحيث ان كل تبديل يحتوى عليها ولا يختلف كل تبديلين الا برتبة وضع بعض هذه الاشياء

فاذا رمز نشئين مختلفين بحرفى ا و ب كان تبديلهما ا ب و ب ا واذا رمز لثلاثة أشياء مختلفة بحروف ا و ب و ح كانت تباديلها هى

$$ا ب ح , ا ح ب , ب ا ح , ب ح ا , ح ا ب , ح ب ا$$

فكل تبديل منها يشتمل على ا و ب و ح غير أنها مختلفة فى الوضع

وعلى العموم اذا رمز لعدد الاشياء بحرف م وللتباديل بحرف ل.  
فنتبين التباديل بالرمز لـ

٢٨٩ ايجاد عدد التباديل - اذا تأملنا في تعريف التباديل  
نجد أن التباديل لاشياء عددها م هو عبارة عن تراتيب هذه الاشياء  
مأخوذة مما أعى ان

$$ل = م$$

ومن حيث ان  $ل = م$   $ل = م (١ - ٢) (٢ - ٣) \dots$  عوامل  
بقدر م فيكون  $ل = م (١ - ٢) (٢ - ٣) (٣ - ٤) \dots$   
أو  $١ \times ٢ \times ٣$

$$ل = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \dots (٢)$$

أعنى أن عدد التباديل لاشياء مختلفة مهما كان عددها يساوى حاصل  
ضرب عدة عوامل مكونة من الاعداد الصحيحة المتتالية مبتدأة من  
الواحد ومنتهية بعدد الاشياء

$$ل = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ١٢٠$$

مثال (١) ما عدد الكيفيات التي يمكن أن يشغل رجلان محلين في  
عربة - نرمز لهما بحرفى ب و ه فيكون  $ل = ١ \times ٢ = ٢$   
وفى الواقع أن الشخص الاول اما أن يشغل المحل الاول ( جهة  
ايمن مثلا ) فينثذ يشغل الثانى المحل الثانى واما أن يشغل الشخص  
الثانى المحل الاول وحينئذ فيشغل الشخص الاول المحل الثانى

مثال (٢) بكم كيفية يمكن أن يجلس امين وبيومى وجاد على ثلاثة كراسى نمرها ١ و ٢ و ٣

الكيفيات التى يجاسون بها عبارة عن تباديل ثلاثة أشياء

$$\text{أى} \quad ٦ = ٣ \times ٢ \times ١$$

مثال (٣) ماعدد الكيفيات التى يشغل فيها أربعة من عساكر الشرطة أربع نقط مختلفة

عدد الكيفيات المطلوبة عبارة عن عدد تباديل أربعة أشياء

$$\text{أى} \quad ٢٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

مثال (٤) ماعدد الاعداد التى يمكن تشكيهاها بخمسة أرقام معنوية مختلفة

الاعداد المطلوبة عبارة عن التباديل لخمسة أشياء معددها

$$١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

٣٩٠ التوافق - يطلق اسم توافق لاشياء عددها م نونا نونا على الجمل المختلفة التى يمكن تكوينها من هذه الاشياء بأخذها نونا نونا بجميع الكيفيات الممكنة من حيث انتخابها فكل جملتين مختلفتان يجنس شئ واحد على الاقل

(ولا يعتبر هنا ترتيب مواضع الاشياء)

فاذا رمز لثلاثة أشياء مختلفة بالحروف ا و ب و ج كانت توافيقها:

$$\text{منى هى} \quad \text{ا ب و ا ج و ب ج}$$

لأن كل مجموعة منها مركبة من حرفين مخالفين للحرفين المركب منهما  
أى مجموعة أخرى منها

وإذا رمزنا لاربعة أشياء مختلفة بالحروف  $a, b, c, d$   
فان توافقها ثلاثى هى  $abc, abd, acd, bcd$   
(على أن لها أربعة وعشرين ترتيباً)

وعلى العموم اذا رمز لعدد أشياء بحرف  $m$  ولعدد الاشياء التى  
يتكون منها كل توافق بحرف  $n$  تبين التوافق المطلوبة بالرمز  $n^m$

٣٩١ إيجاد عدد التوافق - اذا فرض وجود التوافق نونا نونا  
لحروف عددها  $m$  ثم أجرى على كل توافق منها تبديله كان الناتج هو  
عدد الترتيب لتلك الحروف نونا نونا أعنى

$$n^m \text{ أن } n^m = n^m \times n^m$$

$$\text{ومنه ينتج } n^m = \frac{n^m}{n^m} \text{ أو}$$

$$(3) \quad \frac{(1+n-1) \dots (2-1)(1-1)^2}{1 \times 2 \times 3 \dots m} = n^m$$

أعنى أن عدد التوافق لأشياء عددها  $m$  مأخوذة نونا نونا يساوى  
عدد ترتيبها نونا نونا مقسوما على عدد التبديلات للأشياء التى عددها  $n$   
مثال (١) بكم كيفية يمكن وضع نوعين من الفاكهة على مائدة من  
ثلاثة أصناف من الفواكه

عدد الكيفيات المطلوبة هو عبارة عن عدد التوافق مثنى لثلاثة أشياء

$$\text{أى } ٣ = \frac{٢ \times ٣}{٢ \times ١} = ٣^٢$$

مثال (٢) كم كلمة ثلاثية الحروف يمكن تركيبها من سبعة أحرف مختلفة بدون وجود جميع حروف أى كلمة فى أخرى

عدد الكلمات المطلوبة هو عبارة عن عدد التوافق ثلاثى لسبعة أشياء

$$\text{أى } ٣٥ = \frac{٥ \times ٦ \times ٧}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣^٧$$

مثال (٣) بكم كيفية يمكن أن يصرح رئيس مصلحة باجازه لثلاثة من العمال البالغ عددهم عشرة

عدد الكيفيات المطلوبة عبارة عن عدد التوافق ثلاثى لعشرة أشياء

$$\text{أى } ١٢٠ = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣^{١٠}$$

٢٩٢ نتيجة - اذا ضرب البسط والمقام فى قانون التوافق (٣)

فى الكية (٢-٣) ينتج

$$\frac{٣(١-٢)(٢-٢) \dots (٢-٢)}{٣(١-٢) \times ٣} = ٣^٢$$

وبملاحظة أن البسط فى هذه الحالة يصير عبارة عن تبديل م يكون

$$(٤) \quad \frac{٣}{٣(١-٢) \times ٣} = ٣^٢$$

أعنى أن عدد التوافق نونا نونا لحروف عددها م يساوى عدد تبديلها مقسوها على حاصل ضرب تبديل عددها ٣ فى تبديل عددها م - ٣

$$\text{فعلى هذا يكون } ٢١ = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$



٣٩٣ تنبيه قد يراد ايجاد عدد التوافق لاشياء ولا يذكر في منطق السؤال نفس عددها أو عدد ما يؤخذ منها في كل مرة وإنما يعلم ذلك من مفهوم السؤال كما في الامثال الآتية

مثال (١) ماعدد الكيفيات التي يمكن أن ينتخب في كل منها أربعة أشخاص من عشرة بحيث يؤخذ شخص معين في كل مرة بما أن الشخص المعين يلزم انتخابه في كل مرة فيكون الانتخاب الحقيقي هو ٣ من تسعة وبحسب قانون التوافق يكون

$$٨٤ = \frac{٧ \times ٨ \times ٩}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣^٩$$

مثال (٢) ماعدد الطرق التي ينتخب فيها أربعة أشخاص من عشرة بحيث يترك شخص معين في كل مرة

بما أن الشخص المعين لا ينتخب في أى مرة فيكون عدد الانتخاب الحقيقي هو ٤ من ٩ وبحسب قانون التوافق يكون

$$١٢٦ = \frac{٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٤^٩$$

٣٩٤ نظرية - عدد التوافق لاشياء عددها م نونا نونا يساوى عدد التوافق لها م - د في كل مرة

وذلك لانه عند انتخاب أى توفيق من التوافق المطلوبة المشتعلة على أشياء عددها د تترك أشياء عددها م - د ولاختلاف الاشياء جميعها تكون الاشياء المتروكة عبارة عن توفيق مكوّن من أشياء عددها م - د وحيث ان كل مجموعة (توفيق) مكوّنة من د أشياء يقابلها مجموعة (توفيق) مناظر لها تشتمل على أشياء عددها م - د فتتضح النظرية

ومع ذلك فيمكن اثبات هذه النظرية بإيجاد عدد التوافيق بمقتضى القانون العام نمرة ٢٩٢ وبمقتضى ما ذكر بنمرة ٢٩٤ فنجد

$$٢٩٢ = \frac{٢}{٢ \times ١} \quad (٢٩٢)$$

$$٢٩٤ = \frac{٢}{٢ \times ١} \quad (٢٩٤)$$

وحيث ان المقدارين متساويان فيكون  $٢٩٢ = ٢٩٤$  وهذه النظرية تستعمل لاختصار الحساب اذا كان عدد الاشياء التى تنتخب فى كل مرة أكبر من نصف عدد الاشياء كلها

مثال - ماعدد الطرق التى ينتخب فيها ٧ رجال من عشرة

أولا على حسب قانون التوافيق العام يكون

$$١٢٠ = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦} = ١٢٠$$

وبحسب قانون نمرة (٢٩٤) يكون عدد التوافيق سبعة سبعة عشرة أشياء هو عين عدد التوافيق لها (١٠ - ٧) أى ثلاثة ثلاثة

$$١٢٠ = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٢٠$$

وهو عين ما استنتج بالقانون العام

٢٩٥ تنبيه (١) قد يستعمل قانون التوافيق مربكا فى حل بعض مسائل وسنوضح ذلك بالمثالين الآتيين

مثال (١) من جميعه مركبة من ستة مصريين و ٤ أوروبايين يراد تكوين لجنة بها خمسة أعضاء يكون بها اثنان من الاوروبايين فبكم طريقة تتركب اللجنة

من الواضح أن يدخل في اللجنة ثلاثة مصريون ينتخبون من ستة فعدد الكيفيات التي ينتخبون بها يبين بالمقدار

$$\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

وعدد الكيفيات التي ينتخب بها الاوروبايون يبين بالمقدار

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 1} = 6$$

ومن حيث انه يستصحب مع كل كيفية من الكيفيات الاولى كيفية من الثانية فيكون عدد الكيفيات التي تتألف بها اللجنة هو

$$120 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 1} = 120 \times 6$$

مثال (٢) من جميعه مركبة من سبعة مصريين و ٤ أوروبايين يراد تكوين لجنة بها ستة أعضاء بحيث يكون بها اثنان من الاوروبايين على الاقل فما عدد الكيفيات التي يمكن أن تتركب بها اللجنة

اللجنة المطلوبة تكون مما يأتي

أولا من ٢ أوروبايين و ٤ مصريين

ثانيا من ٣ » ٣ مصريين

ثالثا من ٤ » ٢ مصريين

ومجموع النتائج الثلاث هو عدد الكيفيات المطلوبة وبناء على هذا  
فعدد طرق الانتخاب هو

$$= {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_3 \times {}^4C_1 + {}^7C_4 \times {}^4C_0$$

$$= \frac{7!}{1!6!} \times 1 + \frac{7!}{3!4!} \times \frac{4!}{1!3!} + \frac{7!}{4!3!} \times \frac{4!}{0!4!}$$

$$371 = 21 + 140 + 210$$

ولم نستعمل في هذين المثالين قانون الترتيب لانه لم يشترط شئ  
في ترتيب أعضاء اللجنة فيما بينهم

**٢٩٦** تنبيه (٢) قد يستعمل أيضا قانون التوافق مركبا ثم  
يجرى التباديل على الناتج فبذلك تتكون ترتيب بحالة خصوصية كما  
في المثال الآتي

من سبعة أحرف مهملة وأربعة معجمة كم عدد الكلمات الرباعية  
التي يمكن تركيبها بحيث يكون في كل كلمة حرفان مهملان وحرفان معجمان.

الكيفيات التي تنتخب بها الحروف المهملة هي التوافق مثنى لسبعة  
حروف والكيفيات التي تنتخب بها الحروف المعجمة هي التوافق مثنى  
لاربعة حروف وحيث ان كل انتخاب من الاول يستصحب انتخابا  
من الثاني فيكون عدد الانتخابات المذكورة هو

$$\frac{4!}{1!3!} \times \frac{7!}{2!5!} = {}^4C_1 \times {}^7C_2$$

وزيادة على ذلك فبما أن كل كيفية تحتوى على خمسة حروف ويمكن تبديلها فيكون عدد الكلمات المطلوبة هو

$$٣٠٢٤ = ٤ \times \frac{٤}{١ \times ١} \times \frac{٧}{١ \times ١} \text{ كلمه}$$

وبدقة التأمل يرى أن ذلك عبارة عن ترتيب رباعية مأخوذة  
بكيفيات مخصوصة

**٢٩٧** عدد التباديل المكررة الاشياء - لايجاد عدد التباديل  
لاشياء عددها م بفرض أن منها أشياء عددها د متساوية ومنها أشياء  
أخرى عدد ع متساوية وأشياء ثلاثة عددها ك متساوية أيضا وباقي  
الاشياء مختلفة يقال

نرمز للأشياء بحروف عددها م ونفرض أن الحروف التي عددها د  
كل منها أ والحروف التي عددها ع كل منها ب والحروف التي عددها ك  
كل منها ح وأن باقي الحروف مختلفة ومخالفة لكل من أ ب و ح ثم  
نرمز لعدد التباديل المطلوبة بحرف س ه ويقال اذا أخذنا تبديلا من  
التي عددها س ه واستعويضت فيه الحروف التي عددها د وكل منها أ  
بحرف مختلفة ومخالفة لجميع الحروف الأخرى المشتمل عليها التبديل  
المذكور ثم أجزيت تباديل فيه على الحروف التي عددها د مع بقاء  
الحروف الأخرى في مواضعها فانا نحصل على تباديل عددها ل ه وحيث  
أنه يمكن اجراء مثل هذه التباديل في جميع التباديل التي عددها س ه  
فنحصل على تباديل عددها س ه × ل ه

ثم اذا أخذنا أحد هذه التباديل الاخيرة واستعوضت فيه الحروف التي عددها ع وكل منها ب بحروف متغايرة لجميع الحروف الاخرى المشتمل عليها هذا التبديل ثم أجريت تباديل فيه على الحروف التي عددها ع مع بقاء بقية الحروف في مواضعها فانا نحصل منه على تباديل عددها لك وحيث انه يمكن أن نحصل على مثل هذه التباديل من كل واحد من التباديل التي عددها س  $\times$  لك فنحصل حينئذ على تباديل عددها س  $\times$  لك  $\times$  لك

واذا أخذ واحد من التباديل المذكورة واستعوضت فيه الحروف التي عددها ك وكل منها ح بحروف متغايرة ومتغايرة للحروف الاخرى التي فيه ثم أجريت تباديل على الحروف التي عددها ك مع بقاء الحروف الاخرى في مواضعها فانا نحصل منه على تباديل عددها لك

وحيث انه يمكن الحصول على مثل هذه التباديل من كل واحد من التباديل التي عددها س  $\times$  لك  $\times$  لك فنحصل على تباديل عددها س  $\times$  لك  $\times$  لك  $\times$  لك وحيث انه في هذه الحالة صارت الحروف كلها مختلفة فتكون هذه التباديل هي نفس التباديل التي تنتج من الحروف م في حالة ما تكون كلها مختلفة أى لك وحينئذ يكون

$$س \times لك \times لك \times لك = لك \quad \text{ومنه}$$

$$س = \frac{لك}{لك \times لك \times لك} \quad (٤)$$

مثال (١) كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من جميع أحرف كلمة مشمش أحرف كلمة مشمش ٢ م و ٢ ش وعلى حسب القانون

$$٦ = \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١ \times ٢ \times ١} = \frac{٤!}{٢! \times ٢!} \quad \text{يكون عدد تباديلها هو}$$

مثال (٢) ما عدد الكلمات التي يمكن تركيبها من جميع أحرف كلمة مدريد

أحرف كلمة مدريد هي ٢ د و ٢ م و ٢ و ٢ ي وعدد تباديلها على حسب القانون هو

$$٦٠ = \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{٥!}{٢!}$$

مثال (٣) ما عدد الكلمات التي يمكن تركيبها من جميع أحرف كلمة قسطنطينية

أحرف كلمة قسطنطينية هي ٢ ط و ٢ د و ٢ ي و ٢ و و ٢ س و ٢ ه وعدد تباديلها على حسب قانون (٤) هو

$$٤٥٣٦٠ = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١ \times ٢ \times ١ \times ٢ \times ١} = \frac{٩!}{٢! \times ٢! \times ٢!}$$

مثال (٤) ما عدد الاعداد التي يمكن ايجادها من الارقام ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ١ بحيث ان الارقام الفردية تشغل منازل فردية

الارقام الفردية ١ و ٣ و ٣ و ١ تشغل الاربع منازل الفردية من كل عدد بطرق عددها (٤) والارقام الزوجية ٢ و ٤ و ٢ تشغل أربع

منازل زوجية من كل عدد بكيفيات عددها (٤)

وكل كيفية من كيفيات الاعداد الفردية تستصحب كل كيفية من كيفيات الاعداد الزوجية فيكون عدد الاعداد المطلوب يساوى

$$18 = 3 \times 6 = \frac{3}{1} \times \frac{6}{1 \times 1}$$

٢٩٨ لايجاد عدد الترتيب لاشياء عددها م نونا نونا في حالة ما اذا كان يمكن تكرار كل شئ مرة أو مرتين أو ثلاث مرات وهكذا الى مرات عددها د في كل ترتيب

فرض لزيادة ايضاح المقصود من هذه القاعدة أن لدينا محلات عددها د ويوجد أشياء مختلفة عددها م وأنه يراد اشغال المحلات الى عددها د بأشياء تنتخب من التي عددها م بحيث يمكن أن يكرر الشئ المنتخب مرة أو مرتين أو ثلاثا وهكذا الى د مرات فما عدد الترتيب الممكنة فذلك يقال

الموضع الاول يمكن أن نشغله بمقدار م كيفيات وحينما نشغل هذا الموضع بأى كيفية منها فالمحل الثانى يمكن أن نشغله بمقدار م كيفيات ايضا (لانه ليس محظورا علينا أن نشغله بشئ من مثل ما نشغل به الموضع الاول) وبناء عليه فعدد الكيفيات التي يمكن أن نشغل بها المحل الاول والثانى هو  $M \times M = M^2$  والموضع الثالث يمكن أن نشغله بمقدار م كيفيات مع كل كيفية من الكيفيات السابقة وبناء عليه فالمحلات الثلاثة يمكن أن تشغل بمقدار  $M^3$  وبالاستمرار على ذلك يمكن اشغال المحال بمقادير  $M^4$  و  $M^5$  وهكذا ويرى أن أس م هو عين عدد المحلات التي أشغلت فينتج من ذلك أن عدد طرق اشغال د محلات هو  $M^d$



مثال (١) ما عدد الكيفيات التي بها يمكن لرئيس مصلحة أن ينتخب اثنين موظفين في وظيفتين مختلفتين من ثلاثة أنواع من راغبي التوظيف الاول من الحاصلين على شهادة الحقوق الثاني من الحاصلين على شهادة البكالوريا - الثالث من مرفوق الحكومة

هنا م عدد أنواع الاشياء المنتخب منها ٣ و د عدد المحلات اثنان فعلى حسب القانون السابق يكون عدد الكيفيات هو  $٣ = ٩$

ولزيادة البيان نرسم للحقوق بحرف ح وللحاصل على البكالوريا بحرف ك وللرفوق بحرف ف فيكون الجدول الآتي

|                |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الوظيفة الأولى | ح | ح | ح | ك | ك | ف | ف | ف |
| » الثانية      | ح | ك | ف | ح | ك | ف | ف | ح |
| الكيفيات       | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ |

مثال (٢) بكم طريقة يمكن أن نوزع خمس جوائز مختلفة لاربعة اولاد هنا م عدد الاولاد ٤ و د عدد الجوائز ٥ وبحسب القانون تكون الكيفيات هي  $٤ = ١٠٢٤$  كيفية ولزيادة الايضاح نقول الجائزة الاولى يمكن أن ينالها الولد الاقل أو الثاني أو الثالث أو الرابع فلها أربع كيفيات

ومع كل من هذه الكيفيات فتوزع الجائزة الثانية عليهم اما أن ينالها الاول أو الثاني أو الثالث أو الرابع

فعدد الاحتمالات التي يمكن أن تعطى فيها الجائزتان هي  $٤ \times ٤$  أي ١٦

وفي كل حالة من هذه الاحوال فعند توزيع الجائزة الثالثة يكون لها أربع كيفيات فعدد الاحتمالات التي يمكن أن تعطى بها الثلاث جوائز هي  $4^3 = 64$  وبالتبعية فأربع جوائز تعطى بكيفيات عدد  $4^4 = 256$  وخمس جوائز تعطى بكيفيات عدد  $4^5 = 1024$  كيفية **٢٩٩** لايجاد قيمة  $\varnothing$  في الحالة التي يكون فيها عدد التوافيق لاشياء عددها  $m$  مأخوذة نونا نونا أكبر ما يمكن يقال

$$\text{معلوم أن } \varnothing^m = \frac{(1-\varnothing)^2(2-\varnothing)\dots(2-\varnothing)(2-\varnothing)}{\varnothing(1-\varnothing)\dots 3 \times 2 \times 1}$$

$$\text{وأن } \varnothing^{m-1} = \frac{(2+\varnothing-\varnothing)\dots(2-\varnothing)(1-\varnothing)^2}{(1-\varnothing)\dots 3 \times 2 \times 1}$$

$$\text{وحينئذ يكون } \varnothing^m = \frac{1+\varnothing-\varnothing}{\varnothing} \times \varnothing^{m-1}$$

$$\text{والكمية } \frac{1+\varnothing-\varnothing}{\varnothing} \text{ يمكن كتابتها } 1 - \frac{1+\varnothing}{\varnothing}$$

فكلما كانت هذه الكمية أكبر من الواحد يكون المقدار  $\varnothing^m$  أكبر من  $\varnothing^{m-1}$  غير أنه كلما زاد مقدار  $\varnothing$  يصغر العامل المذكور فإذا أعطى الى  $\varnothing$  القيم ١، ٢، ٣، ٠٠٠ على التوالي نجد أن المقدار  $\varnothing^m$  يأخذ في زيادة مستمرة حتى يؤل العامل  $\frac{1+\varnothing}{\varnothing} - 1$  الى الواحد وإذا زاد  $\varnothing$  عن ذلك يؤل العامل المذكور الى قيمة أقل من الواحد وهناك يأخذ المقدار  $\varnothing^m$  في النقص حينئذ فلاجل أن يكون  $\varnothing^m < \varnothing^{m-1}$  يجب أن يكون

$$1 - \frac{1+\varnothing}{\varnothing} < 1 \text{ أو } \frac{1+\varnothing}{\varnothing} < 2 \text{ أو } \frac{1+\varnothing}{\varnothing} < \varnothing$$

ولايجاد المقادير التي تحقق هذا التباين يقال

أولا - اذا كان م عددا زوجيا وفرض أنه يساوى ٢ ح فيكون

$$\frac{1}{3} + 2 = \frac{1+2^2}{3} = \frac{1+4}{3}$$

فيتحقق التباين السابق بكل مقدار يعطى الى ٣ من ١ الى ح وحينئذ

فمقي كان ٣ = ح أى يكون أكبر عدد التوافق هو ٣

أعنى أن أكبر عدد التوافق لاشياء زوجية هو الذى يكون فيه عدد الاشياء المنتخبة في كل توفيق يساوى نصف عدد الاشياء الكلية

ثانيا - اذا كان م فرديا ولنفرض أنه يساوى ٢ ح + ١

$$\text{فيكون } 1 + 2 = \frac{1+2^2}{3} = \frac{1+4}{3}$$

فيتحقق التباين السابق بكل مقدار يعطى الى ٣ من ١ الى ح وحينئذ

فمقي كان ٣ = ح + ١ فالعامل الذى يضرب فيه يصير مساويا للواحد ويكون

$$1 + 2 = \frac{1+2^2}{3}$$

وحيث فرض أن م = ٢ ح + ١ فيكون  $\frac{1-4}{3} = ١$  و

$$1 + 2 = \frac{1+2^2}{3} \text{ وحينئذ يكون}$$

$$\frac{1-4}{3} = \frac{1+2^2}{3}$$

أى أن عدد التوافق لاشياء فردية عددها م يكون أكبر ما يمكن

اذا كانت عدد الاشياء المأخوذة في كل مرة يساوى نصف المقدار

الناتج من اضافة واحد الى عدد الاشياء كلها أو نصف الباقي من طرح واحد من عدد الاشياء كلها

مثال (١) أكبر عدد التوافيق لاشياء عددها ٨ هي التوافيق المركبة من ٤ أشياء منها أى

$$٧٠ = \frac{٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٤^٨$$

$$٥٦ = \frac{٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٥^٨ \quad \text{وأما}$$

معال (٢) أكبر عدد التوافيق لاشياء عددها ٩ هي المأخوذة بمقدار  $\frac{١+٩}{٢}$  أو  $\frac{١-٩}{٢}$  أى المركبة من خمسة أو المركبة من أربعة

$$١٢٦ = \frac{٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٥^٩ \quad \text{اعنى}$$

$$١٢٦ = \frac{٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٤^٩ \quad \text{و}$$

$$٨٤ = \left( \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩} \right) \text{فيساوى}$$

تمرين ٦٨

( ١ ) أوجد عدد الترتيب ثلاث لاربعة أشياء ثم عدد الترتيب سداس لسبعة أشياء ثم عدد الترتيب ثلاث عشرة لثلاث عشرة خمسة عشر شيئاً

( ٢ ) أوجد عدد تبديل ٧ أشياء و ٩ أشياء و ١١ شيئاً

( ٣ ) أوجد عدد التوافق خماس ثم سباع ثم تساع لاحد عشر شيئاً

( ٤ ) ماعدد الترتيب ثلاث حرف كلمة زنجبار

( ٥ ) ماعدد التغيرات المختلفة التى يمكن أخذها من جميع أحرف كلمة بحر

( ٦ ) كم عدد الانتخبات التي يمكن تشكيلها بأربع قطع من العملة المصرية تؤخذ من الأنواع الآتية بجنيه مصرى - ريال - نصف ريال - ربع ريال - قطعة ذات قرشين - قرش

( ٧ ) كم كلمة ذات أربعة أحرف مختلفة يمكن تكوينها من الثمانية والعشرين حرفا الهجائية بحيث أن أحرف أى كلمة لا توجد بتساقطها في كلمة أخرى

( ٨ ) كم كلمة ثلاثية يمكن تكوينها من الثلاثة عشر حرفا المهمة

( ٩ ) كم عددا أكبر من ٢٠٠٠٠ وأقل من ٣٠٠٠٠ يحتوى كل منها على الأرقام ٦ و ٧ و ٨ و ٩

( ١٠ ) يراد تشكيل لجنة يكون بها ثلاثة مهندسين وستة مزارعين يشتغلون من خمسة مهندسين وعشرة مزارعين فكم كيفية يمكن تشكيلها

( ١١ ) كم كلمة رباعية يمكن تكوينها من الثمانية والعشرين حرفا الهجائية بحيث يدخل في أول كل منها حرف أ

( ١٢ ) كم كلمة مركبة من خمسة أحرف بحيث يكون في كل منها ثلاثة أحرف من الثلاثة عشر حرفا المهمة وبقية من خمسة عشر حرفا المعجمة وبحيث لا توجد أحرف أى كلمة بتساقطها في كلمة أخرى

( ١٣ ) من المقرر في علم الحساب أن حاصل ضرب عدة عوامل لا يتغير بتغيير واضعها فكم عدد التغيرات التي يمكن إجراؤها على العوامل  $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

( ١٤ ) كاف مدرس تلاميذ فصل أن يكتب كل منهم عددا مركبا من أربعة الأرقام ٢ و ٧ و ٨ و ٩ وأن لا يكتب تلميذ عدد كتبه آخرونهم وبذلك وجدت جميع الأعداد الممكنة تكونها من هذه الأرقام فكم عدد تلاميذ الفصل

( ١٥ ) ما عدد الكيفيات التي يمكن أن يكتب بها البيت الآتى مع تغير مواضع جميع كلماته الخمان بعضها محل بعض بجميع الكيفيات الممكنة

سعيد همام جواد كريم ذكي نجيب جليل عظيم

(١٦) عربية سكة حديدية بها ثمانية محال في كل جهة أربعة فيكم كيفية يمكن لتأنيته  
ركاب أن يشغلوا هذه المحال بعد العلم بأن اثنين منهم لا يمكنهما أن يجلسا بعكس سير القطار  
وواحد لا يمكنه أن يجلس الا بعكس سير القطار

(١٧) اذا كان عدد الترتيب سبع لاشياء عددها ٥ مساوى ٣٠ مرة عدد الترتيب  
سداس لاشياء عددها ٥ — ٢ فاوجد مقدار ٥

(١٨) اذا كان عدد التوافيق نونا نونا لسته عشر شيئا يساوى عدد التوافيق نونا  
ناقصا ثمانية نونا ناقصا ثمانية لتلك الاشياء فاوجد مقدار ٥ ثم احسب المقدارين  
٥ و ١٨ و ٥

(١٩) اذا كانت نسبة عدد التوافيق نحاس لاشياء عددها م الى عدد التوافيق ثلاثه  
لاشياء عددها م — ١ كنسبة ٢٤ الى ٥ فاوجد مقدار م

(٢٠) يراد تكوين ارسالية لاوروبا من خمسة طلبة ينتخبون من ستة طلبة من مدارس  
المعلمين ومن أربعة من طلبة الطب بحيث يكون اثنان من هذه الارسالية من طلبة الطب  
فيكم كيفية يكون انتخابهم

(٢١) يراد تشكيل مجلس عسكري من ستة أعضاء ينتخبون من أربعة من الضباط  
العظام ومن سبعة من الضباط الآخرين بحيث يكون في هذا المجلس اثنان من الضباط  
العظام على الاقل فاعدد كيفيات انتخاب أعضائه

(٢٢) يراد تشكيل لجنة من سبعة أشخاص ينتخبون من خمسة موظفين ومن ثمانية من  
الاعيان بحيث يكون في هذه اللجنة ثلاثة موظفون على الاقل فاعدد الكيفيات التي تنتخب  
بها هذه اللجنة

(٢٣) ما عدد الكيفيات التي يمكن أن تنتخب بها أربع جرائد يومية من عشر جرائد مع  
ملاحظة أحد الشرطين الآتيين

- أولاً — بانتخاب جريد مخصوصة منها في كل مرة  
ثانياً — بترك جريدة مخصوصة منها في كل مرة

(٢٤) ماعدا الكلمات التي يمكن تركيبها من أحرف كلمة هدهد بتغيير مواضع الاحرف وكذا من أحرف كلمة ممسمة ثم من أحرف كلمة سيسيلية

(٢٥) ماعدد الكلمات التي يمكن تركيبها من جميع احرف كلمة سلسلة ثم من جميع أحرف كلمة بربرى ثم من جميع أحرف كلمة طليطلة

(٢٦) كم عدد الأعداد التي يمكن تركيب كل منها من الأرقام ٢ و ٣ و ٢ و ٣ و ١ و ٢ و ٣ و ١ و ٠

(٢٧) ماعدا الحدود المختلفة التي يمكن احداثها من أحرف الحد  $٥^٥$   $٥^٦$   $٥^٧$  اذا كتبت بدون أسس

(٢٨) ماعدد الكيفيات التي يمكن أن توزع بها ٣ جوائز مختلفة (ساعة ومحفظة وكتاب) على أربعة تلاميذ ( ذكي ونجيب وراغب وشاكر ) يتسابقون في الامتحان في ثلاثة علوم

(٢٩) ماعدد الكيفيات التي يمكن أن يعطى بها أشياء عددها ٥ الى أشخاص عددها م اذا لم يكن هناك قيد في عدد الأشياء التي يأخذها كل شخص

(٣٠) عشرة ملاعين في قارب واحد لا يمكنه أن يجذف الواجهة اليمنى وواحد لا يمكنه أن يجذف الواجهة الشمال فاعدد الكيفيات التي يمكن أن يجلس بها هؤلاء الملاعون ليجدوفوا في القارب

(٣١) بكم كيفية يمكن أن يجلس ٥ أشخاص حول منضدة مستديرة (يلاحظ تثبيت أحدهم في محل)

(٣٢) بكم كيفية يمكن أن يجلس ستة أشخاص ثلاثة أولاد وثلاث بنات حول منضدة مستديرة بحيث لا يجلس ولدان متجاورين (يثبت أحد الأشخاص في محل)

(٣٣) بكم كيفية يمكن أن يكون أشخاص عددهم ٥ صفا فرديا اذا كان شخصان منهم لا يشغلان طرفي الصف

(٣٤) بكم كيفية يمكن أن يكون عشرة أشخاص صفا فرديا بشرط أن اثنين منهم لا يكونان في طرفيه

## نظرية ذات الحدين

٣٠٠ تمهيد تقدم بنمرة ٤٩ أن

(س + ا) (س + ب) = س<sup>٢</sup> + (ا + ب) س + اب (١)  
ويرى أن هذا الحاصل (قبل الاختصار) مكوّن من حدود كل منها  
مركّب من حرفين وكل حرف منهما مأخوذ من عامل واذا بحثنا  
طريقة تركيبها نجد

- (١) س<sup>٢</sup> مكوّن من أخذ حرف س من كل عامل  
(٢) الحدان المحتويان على س مكوّن كل منهما من أخذ الحرف  
س من كل عامل وأحد الحرفين ا و ب على التوالى  
(٣) الحد الذى لم يشتمل على س هو حاصل ضرب الحرفين  
ا و ب

مثال اذا جعل فى القانون (١) أن ١ = ٢ و ٢ = ٣ يكون

(س + ٢) (س + ٣) = س<sup>٢</sup> + ٥ س + ٦  
فاذا أريد تكوين حاصل ضرب ثلاث كميات كل منها ذات  
حدين مثل

(س + ا) (س + ب) (س + ج) يكون حاصل ضرب  
الكيتين الاول كما تقدم ثم يضرب الحاصل فى (س + ج) فينتج  
س<sup>٣</sup> + (ا + ب + ج) س<sup>٢</sup> + (اب + اج + بـج) س + ا ب ج (٢)



وهذا الحاصل ( قبل الاختصار ) مكوّن من عدة حدود كل منها مركب من ثلاثة أحرف وكل حرف مأخوذ من عامل وإذا بحثنا كيفية تكوينها نجد

- (١)  $س^٣$  مكوّن من أخذ الحرف  $س$  من كل عامل  
 (٢) الحدود المشتملة على  $س^٢$  مكوّن كل منها من أخذ الحرف  $س$  من كل عاملين على التوالي وأحد الأحرف  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  من العامل الباقي  
 (٣) الحدود المشتملة على  $س$  مكوّن كل منها من أخذ الحرف  $س$  من كل عامل على التوالي وحرفين من الأحرف  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  يؤخذان من العاملين الباقيين

(٤) الحد الذي لم يشتمل على  $س$  مكوّن من الأحرف  $ا$  و  $ب$  و  $ح$   
 مثال إذا جعل في القانون (٢)  $١ = ب$  و  $٢ = ح$  و  $٣ = ا$  و  $٥ = هـ$   
 يكون  $(س + ب) (س + ح) (س - ا) (س + هـ) = س^٤ + س^٣ + ٤ س^٢ - ١١ س - ٣٠$

وإذا أريد تكوين حاصل ضرب أربع كميات كل منها ذات حدين مثل  $(س + ا) (س + ب) (س + ح) (س + د)$  يكون حاصل ضرب الثلاث كميات الاول كما تقدم ثم يضرب الحاصل في  $س + د$  فينتج

$$\begin{aligned} & س^٤ + (س^٣ + س^٢ + س + ا) (س + ب) + (س^٢ + س + ا) (س + ح) + (س + ا) (س + د) \\ & + س^٣ + (س^٢ + س + ا) (ب + ح + د) + س^٢ + (س + ا) (ب + ح + د) + س + ا (ب + ح + د) \end{aligned}$$

وهذا الحاصل (قبل الاختصار) مكوّن من جملة حدود كل منها مركب من أربعة أحرف وكل حرف مأخوذ من عامل وإذا بحثنا كيفية تكوينها نجد

- (١) س<sup>١</sup> مكوّن من أخذ الحرف س<sup>١</sup> من كل عامل
- (٢) الحدود المشتملة على س<sup>٢</sup> كل منها مكوّن من أخذ الحرف س<sup>٢</sup> من كل ثلاثة عوامل على التوالى وأحد الأحرف ا و ب و ح و د من العامل الباقي (المعتبر أنه لم يؤخذ منه س<sup>٢</sup>)
- (٣) الحدود المشتملة على س<sup>٣</sup> كل منها مكوّن من أخذ الحرف س<sup>٣</sup> من كل عاملين على التوالى وحرفين من الأحرف ا و ب و ح و د يؤخذ ان من العاملين الباقيين (المعتبر أنه لم يؤخذ منهما س<sup>٣</sup>)
- (٤) الحدود المشتملة على س<sup>٤</sup> مكوّن كل منها من أخذ الحرف س<sup>٤</sup> من كل عامل على التوالى وثلاثة من الأحرف ا و ب و ح و د تؤخذ من ثلاثة العوامل الباقية (المعتبر أنه لم يؤخذ منها س<sup>٤</sup>)
- (٥) الحد الذى لم يشتمل على س<sup>٤</sup> مكوّن من أربعة الأحرف ا و ب و ح و د

$$\begin{aligned}
 & \text{مثال إذا جعل في (٣) } ١ = ٢, ٢ = ٣, ٣ = ٤, ٤ = ٥ \\
 & ٨ - \text{ يكون (س}^٢ + ٢) \text{ (س}^٣ - ٣) \text{ (س}^٤ + ٤) \text{ (س}^٥ - ٥) = س}^٤ \\
 & ١٥ - (٢ - ٣ + ٤ - ٥) + س}^٣ (٨ - ٥ + ٣ - ٢) + \\
 & (٢٤ - ٤٠) + س}^٢ (- ٣٠ + ٤٨ - ٨٠ + ١٢٠) + \\
 & ٢٤٠ + س}^٤ = ٢٤٠ + س}^٤ + ٤ س}^٣ - ٤٣ س}^٢ - ٥٨ س} + ٢٤٠
 \end{aligned}$$

وبالاستمرار على نحو ما ذكر يمكن تكوين حاصل ضرب خمسة عوامل وستة عوامل وهكذا لكميات كل منها مركب من حدين ، ومن الايضاحات السابقة يمكن أن يستنتج ما يأتي

أولاً - حاصل الضرب مكوّن من جملة كميات تزيد بواحد عن عدد المضارب ذات الحدين

ثانياً - أن أس  $s$  في الحد الاول مساويا لعدد المضارب ذات الحدين وأسه في كل من الحدود التالية ينقص بواحد من سابقه

ثالثاً - مكرر الحد الاول هو الواحد ومكرر الحد الثاني هو مجموع الحدود الثانية من المضارب ذات الحدين ومكرر الحد الثالث هو مجموع الحدود الثانية مأخوذة مثنى ومكرر الحد الرابع هو مجموع الحدود الثانية مأخوذة ثلاث وهكذا والحد الأخير هو حاصل ضرب الحدود الثانية من الكميات ذات الحدين

٣٠١ ليبان أن هذه القاعدة حقيقية في تكوين حاصل ضرب كميات ذات حدين مهما كان عددها يكفي أن نبرهن على أنها اذا كانت حقيقية في عوامل عددها  $m$  تكون حقيقية في عوامل عددها  $m + 1$

فاذا فرض أنها حقيقية في العوامل الآتية بأن كان

$$(s + 1)(s + 2) \dots (s + m) \dots (s + k) \\ = s^m + s^{m-1} + s^{m-2} + \dots + s^2 + s + 1$$

(وفي هذا الحاصل  $\frac{1}{2}$  رمز لمجموع الحدود الثانية  $أ و ب و ج و ...$   
 $ك و \frac{1}{2}$  رمز لحاصل ضربها مثنى  $\frac{1}{2}$  رمز لحاصل ضربها ثلاث  
وهكذا  $\frac{1}{6}$  رمز لحاصل ضربها كلها) فإذا ضرب طرفا هذه المتساوية  
في كمية ذات حدين مثل  $س + ل$  بأن يضرب الطرف الثاني أولا  
في  $س$  ثم في  $ل$  واختصرت الحاصل ينتج  $(س + ل)(س + ب)$   
 $(س + ج) ... ... (س + ك)(س + ل) =$

$$(\frac{1}{2}J + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(J + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(J + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}J + \dots + \frac{1}{2}J$$

فيري أولاً أن  $m$  في الحد الأول هو  $m + 1$  وهو مقدار عدد العوامل الأصلية زائداً واحد أي بقدر عدد العوامل الجديدة وإن أسسه في الحدود الأخرى آخذة في النقص بواحد في كل حد عن سابقه

ثانياً - أن مكرر الحد الاول هو الواحد ومكرر الحد الثاني هو  $\frac{1}{2}$  + ل أى مجموع الحدود الثانية بما فيها ل وان مكرر الحد الثالث هو  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ل أى مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية الأصلية مثنى مضافا اليها حاصل ضرب الحدود الثانية فى الحد الجديد ل وهذا هو عبارة عن مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية كلها بما فيها ل وأن مكرر الحد الرابع  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ل مكوّن من مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية الأصلية ثلاث مضافا اليه  $\frac{1}{2}$  ل أى حاصل ضرب الحدود الثانية الأصلية مثنى فى ل وهذا هو عبارة عن مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية كلها ثلاث بما فيها ل وهكذا وأما الحد الأخير وهو  $\frac{1}{2}$  ل فانه

مكوّن من الحدود الثانية الأصلية مضروبة في الحد ل فهو حاصل ضرب الحدود الثانية كلها بما فيها ل وبذلك تتضح صحة القاعدة في حدود عددها  $١ + ٢$

ومن حيث ان ثبت صحة هذه القاعدة في عوامل عددها  $١ + ٢$  بفرض ثبوت صحتها في عوامل عددها  $٢$  وقد سبق بيان صحتها في أربعة عوامل فثبتت اذن صحتها في خمسة عوامل ومتى ثبتت صحتها في خمسة عوامل تثبت صحتها في ستة وهلمّ جزاً واذن فهي حقيقة مهما كان عدد العوامل

٣ . ٣ تنبيه اذا تأملنا في تكررات سه التي هي  $٢$  و  $٣$  و  $٤$  ... الخ من حاصل ضرب كميات ذات حدين نجد أن عدد حدود المكرر  $٢$  هو عدد الحروف الثانية التي عددها  $٢$  وأن حدود عدد المكرر  $٣$  هو كعدد التوافق مثنى للحروف الثانية أي  $٢ \times ٢$  وان عدد حدود المكرر  $٤$  هو كعدد التوافق ثلاث لتلك الحروف أي  $٢ \times ٢ \times ٢$  وهكذا

٣ . ٣ قانون ذات الحدين - الفرض من قانون ذات الحدين هو ايجاد مقدار كمية ذات حدين مرفوعة الى درجة ما

لفرض أن المطلوب ايجاد مقدار (سه + ح)  $٢$  أي ايجاد قانون لحاصل ضرب كميات ذات حدين كل منها سه + ح وعددها  $٢$  أي (سه + ح)  $٢$  = (سه + ح) (سه + ح) (سه + ح) ... عوامل يقدر  $٢$

$$+ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (n + n + \dots + n)$$
$$(1) \quad 1^2 \times \frac{(1-1)^2}{1 \times 1} + 1^2 \times 1 + 1^2 = 1^2(1+1)$$

ويكتفى هنا في بيان عدد التوافيق مثنى وثلاث ورباع وهكذا  
للحروف التي عددها ٢٠ بالرموز ٢٠ و ٢١ و ٢٢ الخ وبمراعاة ما ذكر  
يمكن كتابة القانون السابق هكذا

$$+ \overset{r-1}{\underset{(1)}{\text{---}}} r_1 u + \overset{r-1}{\text{---}} r_1 u + \overset{r}{\text{---}} = \overset{r}{(r+s)}$$

٣٠٤ اذا وضعنا في القانون السابق المقدار  $-ح$  بدلا من  $ح$  ينتج

$$(س - ح)^2 = س^2 + ح^2 - ٢سح$$

$$+ ح^2 - ٢سح + ... + ح^2 - ٢سح + ح^2$$

وبملاحظة أن القوى الفردية للحدود السالبة تكون سالبة وقواها الزوجية موجبة يكون

$$(س - ح)^2 = س^2 - ٢سح + ح^2$$

$$- ٢سح + ح^2 + ... + ح^2 - ٢سح + ح^2$$

وبمقارنة هذا القانون بالسابق يرى أن الحدود في المقدارين  $(س + ح)^2$  و  $(س - ح)^2$  متحدة المقدار المطلق ولكن في  $(س - ح)^2$  هي بالتوالى موجبة وسالبة والحد الاخير يكون موجبا أو سالبا على حسب ما يكون  $ح$  زوجيا أو فرديا

مثال ١  $(س + ح)^3 = س^3 + ٣س^2ح + ٣سح^2 + ح^3$

$$+ ٣س^2ح + ٣سح^2 + ح^3$$

وباستفاضة عدد التوافيق بمقاديرها ينتج

$$(س + ح)^3 = س^3 + ٣س^2ح + ٣سح^2 + ح^3$$

$$+ ٣س^2ح + ٣سح^2 + ح^3$$

مثال ٢  $(س - ح)^3 = س^3 - ٣س^2ح + ٣سح^2 - ح^3$

$$- ٣س^2ح + ٣سح^2 - ح^3$$

مثال ٣  $(س - ح)^3 = س^3 - ٣س^2ح + ٣سح^2 - ح^3$

$$- ٣س^2ح + ٣سح^2 - ح^3$$

$$(س - ح) = س^٥ - س^٤ - ٥ س^٣ + ١٠ س^٢ - ١٠ س + ٥$$

٣٠٥ القانون العام لاي حد من حل ذات الحدين

في قانون ذات الحدين السابق يشاهد مايتأتى

أولا - أن أسس ح تبتدىء من العلم وتأخذ في الزيادة الى م

وان درجته في أى حد هي أقل بواحد من ترتيب هذا الحد

ثانيا - أن أسس س تبتدىء من درجة م وتأخذ في النقص

حتى تؤل الى صفروان درجة أسه في أى حد هي باقى طرح أس ح

من م ويؤخذ من هذا أن مجموع أسس س و ح في أى حد يساوى م

ثالثا - أن المكررات هي عبارة عن ١ ثم م (أى التوافيق واحدا

واحدا لحروف عددها م) ثم عدد التوافيق مثنى وثلاث ورباع

لحروف عددها م حتى نصل الى عدد التوافيق التى عددها م (أى

واحدا) وأن مكرر أى حد هو عدد التوافيق المبينة بمقدار أقل بواحد

من ترتيب هذا الحد

رابعا - علامة أى حد تكون سالبة اذا كان ح سالبا وكان الحد

زوجى الرتبة وماعدا ذلك فهي موجبة

ومما ذكر يمكن الحصول على أى حد من التحليل اذا علم ترتيبه

فاذا فرض أن المطلوب إيجاد الحد الذى ترتيبه م + ١ من حل ذات

الحدين (س + ح) م يكون أس ح هو م وأس س هو م - م

والمكرر هو م وأما العلامة فهي موجبة ويكون



الحد الذى ترتيبه  $(1 + ٢) = ٣$   $٣$   $٢$   $١$   $٢$   $١$   $٢$   $١$  ويوضع بل  
التوافق مقدارها يكون

$$\frac{(1+٢-٢)٠٠٠+(٢-٢)(١-٢)٢}{٢} = (1 + ٢) \text{ الحد الذى ترتيبه } ٢$$

مثال ١ أوجد الحد الخامس من  $(١ + ٢)^{١٧}$

$$\frac{١٤ \times ١٥ \times ١٦ \times ١٧}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٧ \text{  $٣$  } (٢) \text{  $٣$  } = ١٦ \times ١٣ \text{  $٣$  } ٣٨٠٨٠ = ١٢$$

مثال ٢ أوجد الحد الرابع عشر من  $(١ - ٣)^{١٥}$

$$\text{الحد الرابع عشر} = ١٥ \text{  $٣$  } ١٣ \text{  $٣$  } ١٣ \text{  $٣$  } ٩ = ١٣ \text{  $٣$  } ٩ \text{  $٣$  } ٩٤٥ -$$

مثال ٣ أوجد الحد العاشر من  $(٣ + ١)^{١٤}$

$$\text{الحد العاشر} = ١٤ \text{  $٣$  } ٩ \text{  $٣$  } ٩ \text{  $٣$  } ٩ = ٩ \text{  $٣$  } ٩ \text{  $٣$  } ٩ \text{  $٣$  } ٩ = ٦١٠٥٦٦٦$$

٣٠٦ تنبيه يمكن إيجاد معامل أى حد من حل المقدار  
(  $٣ + ١$  ) إذا علم معامل الحد الذى قبله مباشرة وذلك بأن  
نضرب معامل الحد المعلوم فى أس  $٣$  من هذا الحد ونقسم الحاصل  
على رتبة هذا الحد عينه

مثلا فى حل المقدار (  $٣ + ١$  ) إذا علم أن مكرر الحد الثالث  
هو ٢١ فان أس  $٣$  فى هذا الحد يكون ٥ - ٢ أى ٥ ورتبة هذا  
الحد الثالثة واذن مكرر الحد الرابع يكون  $\frac{٥ \times ٢١}{٣} = ٣٥$

$$+ \dots + \binom{r}{r-2} u^2 + \binom{r}{r-1} u + 1 = \binom{r}{r} (u+1)^r$$

$$+ r_p \frac{(1-r)^p}{r \times 1} + r_p + 1 = r(p+1)$$

$$\sum_{r=0}^n \frac{(1+r-r) \cdots (r-r)(1-r)r}{r!}$$

$s^2(e+1) = [s(e+1)]^2 = (s+e)^2$   
أعني أن نبحث عن مقدار الكمية  $s^2(e+1)$  كما تقدم بخورة ٣٠٧ ثم  
نضرب كل حد منها في  $s^2$

وكذلك يمكن إيجاد مقدار أى حذمنها بإيجاد مقدار الحد العام من  
 (١ + ٣) <sup>٢</sup> المبينة بـ ٣٠٧ وضربه في ٢

مثال ١ ليكن المطلوب إيجاد مقدار (س + ح) تأخذ سه مضروباً مشتركاً فينتج (س + ح) سه<sup>٦</sup> = سه<sup>٦</sup> (١ +  $\frac{ح}{س}$ ) ثم نبحث عن مقدار (١ +  $\frac{ح}{س}$ ) فوجد

$$\begin{aligned} \frac{٢٠}{س^٢} + \frac{٢٠}{س^٢} + \frac{٢٠}{س^٢} + ١ &= (١ + \frac{ح}{س})^٦ \\ ٤ + \frac{٤}{س^٤} + \frac{٥}{س^٥} + \frac{٦}{س^٦} &= ١ + \frac{٦}{س} + \frac{١٥}{س^٢} + \frac{٢٠}{س^٣} + \frac{١٥}{س^٤} + \frac{٦}{س^٥} + \frac{١}{س^٦} \\ \text{وبضرب طرفي المتساوية في سه}^٦ \text{ ينتج سه}^٦ (١ + \frac{ح}{س})^٦ &= سه^٦ \\ + ٦ سه^٥ ح + ١٥ سه^٤ ح^٢ + ٢٠ سه^٣ ح^٣ + ١٥ سه^٢ ح^٤ + ٦ سه ح^٥ + سه^٦ ح^٦ & \end{aligned}$$

مثال ٢ ليكن المطلوب إيجاد الحد الخامس من (س + ح) فلاحظ أنه الحد الخامس من (١ +  $\frac{ح}{س}$ ) مضروباً في سه<sup>٦</sup> وبواسطة القانون العام لمقدار أى حد نمرة ٣٠٧ ينتج الحد الخامس =  $\frac{٦}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \times \frac{ح^٤}{س^٤} = ١٥ \frac{ح^٤}{س^٤}$  وبضرب هذا المقدار في سه<sup>٦</sup> ينتج الحد الخامس من (س + ح) سه<sup>٦</sup> = ١٥ ح<sup>٤</sup> سه<sup>٢</sup>

## تمرين ٦٩

أوجد مقادير كل كمية من الكميات ذات الحدين الآتية

|                          |  |                           |
|--------------------------|--|---------------------------|
| (١) (س + ١) <sup>٤</sup> |  | (٥) (س - ب) <sup>٥</sup>  |
| (٢) (س + ٣) <sup>٥</sup> |  | (٦) (س - ٢) <sup>٤</sup>  |
| (٣) (س + ٦) <sup>٦</sup> |  | (٧) (س - ٤) <sup>٥</sup>  |
| (٤) (س - ب) <sup>٤</sup> |  | (٨) (٢س + ح) <sup>٥</sup> |

|   |                                    |
|---|------------------------------------|
| $(١٥) (٢ \text{ سه} + \frac{\text{صه}}{٢})^٤$ | $(٩) (٢ \text{ سه} + ٣)^٥$         |
| $(١٦) (١ + \frac{٣}{٧})^٧$                    | $(١٠) (٢ - \frac{\text{سه}}{٢})^٦$ |
| $(١٧) (١ \text{ سه} + \frac{\text{صه}}{٩})^٩$ | $(١١) (٣ \text{ سه} - ٦)^٦$        |
| $(١٨) (١ + ٤ \text{ سه})^٤$                   | $(١٢) (٣ \text{ سه} - ٧)^٧$        |
| $(١٩) (١ - ٢ \text{ سه})^٥$                   | $(١٣) (٣ \text{ سه} - ٥)^٦$        |
| $(٢٠) (١ \text{ سه} - \frac{\text{صه}}{٩})^٩$ | $(١٤) (٢ \text{ سه} - ٤)^٥$        |

أوجد مقادير كل من الحدود المقيمة من حل الكميات الآتية

|  |  |
|--|--|
| $(٢٦) \text{ الخامس عشر من } (٢ \text{ سه} - ١)^{١٧}$                        | $(٢١) \text{ الرابع من } (٣ + ٧ \text{ سه})^٧$ |
| $(٢٧) \text{ السابع من } (١ - \frac{١}{\text{سه}})^{١٠}$                     | $(٢٢) \text{ الخامس من } (٣ \text{ سه} - ٦)^٦$ |
| $(٢٨) \text{ العاشر من } (٣ \text{ سه} - ١٧)^{١٧}$                           | $(٢٣) \text{ الرابع من } (١ - \text{سه})^{١٢}$ |
| $(٢٩) \text{ السادس من } (٣ \text{ سه} - \frac{١}{٩})^٩$                     | $(٢٤) \text{ السادس من } (٢ - \text{صه})^٧$    |
| $(٣٠) \text{ الثالث والعشرون من } (٣ \text{ سه} + \frac{٥}{\text{سه}})^{٢٥}$ | $(٢٥) \text{ الخامس من } (١ - ٥ \text{ ب})^٧$  |

(٣١) أوجد مقدار  $(\sqrt[٤]{٣ - \text{سه}}) + (\sqrt[٤]{٣ + \text{سه}})$

(٣٢) أوجد مكر  $\sqrt[٢]{٢ + \text{سه}}$  من  $(١٠ \text{ سه})$

(٣٣) أوجد مكر سه من  $(\frac{١}{\text{سه}} - \frac{١}{٤ \text{ سه}})^{١٤}$

(٣٤) أوجد مكر سه من  $(\frac{٢}{\text{سه}} - \frac{٢}{٣ \text{ سه}})^{١٥}$

(٣٥) أوجد الحد الذي لا يشتمل على سه من  $(٢ \text{ سه} - \frac{١}{\text{سه}})^{١٢}$

(٣٦) إذا كان ثلاث مكرات متتالية من حل  $(١ + \text{سه})^٢$  هي ٢٥ و ٢١

و ٧ أوجد مقدار  $\sqrt[٢]{٢}$

(٣٧) إذا كان ثلاثة مكرات متتالية من حل  $(١ - \text{سه})^٢$  هي ٢٠ -

و ١٩٠ و ١١٤ فما مقدار  $\sqrt[٢]{٢}$

(٣٨) اذا كانت النسبة بين الحدين الثاني والثالث من حل ذات الحدين (١ + ب) د  
كالنسبة بين الحدين الثالث والرابع من حل ذات الحدين (١ + ب) د + ٣  
أوجد مقدار د

$$(٣٩) \text{ أوجد مكرّر } \overline{r} \text{ في حل المقدار } (\overline{r}^2 + \frac{1}{\overline{r}})$$

$$(٤٠) \text{ أوجد الحد المتوسط من حل } (\overline{r} + ١) \text{ د}^2 \text{ في أبسط أوضاعه}$$

٣٠٩ مكررا كل حدين متساويي البعد من الطرفين في حل  
المقدار (١ + س) د متساويان

لنفرض حدين ترتيبهما من الطرفين  $١ + س$  فن المعلوم (٣٠٥)  
أولا أن مكرر الحد الذي ترتيبه  $١ + س$  من الابتداء هو عدد التوافق  
بقدر  $س$  لحروف عددها د أي د  $س$  وثانيا أن الحد الذي ترتيبه  
 $١ + س$  من الانتهاء يسبقه حدود عددها د + ١ -  $(١ + س)$   
أي د -  $س$  ويكون ترتيبه هو د -  $س + ١$  ومكرر هذا الحد  
هو عدد التوافق بقدر د -  $س$  لحروف عددها د أي د -  $س$   
وبما أن عدد هذه التوافق هو كعدد التوافق بقدر  $س$  أي د  $س$   
(٢٩٤) فثبتت صحة القاعدة

مثلا لايجاد مكرر الحد الرابع من الطرفين في حل المقدار (١ + س)  $٩$  يقال  
مكرر الحد الرابع من الابتداء هو  $٩$  د  $٣$  والحد الرابع من الانتهاء هو  
السابع من الابتداء ومكرره هو  $٩$  د  $٣$  وبموجب (٢٩٤) يعلم أن  $٩$  د  $٣$   
 $= ٩$  د  $٣$  واذن فيكون المكرران متساويين وبحساب كل منهما نجده ٨٤

$$٣١٠ \text{ أكبر مكرر في حل المقدار } (١ + س) \text{ د}$$

يؤخذ مما تقدم في (٣٠٥) أن مكرر الحد العام الذى يرمز له بالرمز  $s + 1$  فى حل المقدار  $(s + 1)$  هو  $\frac{s}{s+1}$  ومن حيث أنه تقدم بنمرة (٢٩٩) أن أكبر عدد التوافق لحروف عددها  $\frac{s}{s+1}$  هو عدد التوافق المأخوذة بقدر نصف  $\frac{s}{s+1}$  متى كان زوجيا والمأخوذة بقدر نصف  $(\frac{s}{s+1} + 1)$  أو نصف  $(\frac{s}{s+1} - 1)$  اذا كان فرديا فتكون هذه المقادير هى أكبر مكرر فى حل  $(s + 1)$

مثلا أكبر مكرر فى حل المقدار  $(s + 1)$  هو المبين بتوافق لحروف عددها ٨ مأخوذة بقدر  $\frac{8}{4} = 2$  ( أى مكرر الحد الخامس ) ومقداره ٧٠

وأ أكبر مكرر فى حل المقدار  $(s + 1)$  هو المبين بتوافق لحروف عددها ١١ مأخوذة بقدر  $\frac{11-1}{4} = 2$  أى مكرر الحد السادس أو المبين بتوافق لحروف عددها ١١ مأخوذة بقدر  $\frac{1+11}{4} = 3$  أى مكرر الحد السابع وكلاهما ٤٦٢

٣١١ إيجاد أكبر حد فى حل المقدار  $(s + 1)$

معلوم أن  $(s + 1) = \frac{s}{s+1}$  ومن حيث ان  $\frac{s}{s+1}$  يضرب فى كل حد من مقدار  $(\frac{s}{s+1} + 1)$  فيكفى البحث عن أكبر حد من حل هذه الكمية ولذا يقال اذا فرض أن  $s + 1$  و  $s$  رمزان لرتبتي حدين متتاليين من مقدار  $(\frac{s}{s+1} + 1)$  فان الحد  $s + 1$  ينتج من ضرب الحد  $s$  فى  $\frac{1+s}{s} \times \frac{s}{s+1}$  أى بضربه فى  $(1 - \frac{1}{s+1})$  كما فى (٣٠٥) ومن حيث أنه

العامل  $\frac{1+\frac{2}{r}}{p}$  - ١ يأخذ في الصغر كلما زاد مقدار  $r$  فالحد  $r + ١$  لا يكون أكبر من الحد  $r$  الا اذا آل المقدار  $(\frac{1+\frac{2}{r}}{p} - ١)$  الى الواحد أو الى مقدار أقل من الواحد

ولنبحث عن ما يلزم أن يأخذه هذا المقدار ليكون مساويا للواحد أو أكبر منه فأولا نفرض أن  $(\frac{1+\frac{2}{r}}{p} - ١) = \frac{r}{p}$  وبحل هذه المعادلة بالنسبة الى  $r$  نجد  $r = \frac{p(1+\frac{2}{r})}{p+\frac{r}{p}}$  (١)

وثانيا - نفرض أن  $(\frac{1+\frac{2}{r}}{p} - ١) < \frac{r}{p}$  ثم نحل هذه المتباينة بالنسبة الى  $r$  بأن نضرب الطرفين في  $\frac{p}{r}$  ونحول الطرف الثاني فينتج

$$\frac{1+\frac{2}{r}}{p} < ١ + \frac{r}{p} \quad \text{أو} \quad r < \frac{p(1+\frac{2}{r})}{p+\frac{r}{p}} \quad (٢)$$

ومن حيث ان رتبة الحد المرموز له بحرف  $r$  لا بد أن تدل على عدد صحيح فاذا كانت  $\frac{p(1+\frac{2}{r})}{p+\frac{r}{p}}$  عددا صحيحا ورمز له بحرف  $c$  فينبغي أن يجعل  $r = c$  ليكون العامل الذي يضرب في  $r$  واحدا (١) وحينئذ فالحد الذي ترتيبه  $c + ١$  يكون مساويا للحد الذي ترتيبه  $c$  وهما أكبر من أى حد في حل المقدار المفروض

واذا كانت  $\frac{p(1+\frac{2}{r})}{p+\frac{r}{p}}$  ليس بعدد صحيح ورمز لحزبه الصحيح بحرف  $k$  فبناء على قانون (٢) المذكور آنفا يكون الحد الذي ترتيبه  $k + ١$  هو أكبر حد في حل المقدار المفروض

وبناء على ما ذكر فانه ينبغي حساب المقدار  $\frac{p(1+\frac{2}{r})}{p+\frac{r}{p}}$  فان كان عددا صحيحا دل ذلك على أن أكبر حدود الحل حدان متساويان أحدهما الذي ترتيبه بقدر هذا العدد الصحيح والثاني الذي ترتيبه أكبر منه بواحد

وإذا كان المقدار المذكور عددا كسريا دل ذلك على أن أكبر حدود  
الحل هو الحد الذي ترتيبه بقدر الجزء الصحيح من ذلك المقدار زائدا  
واحدا

ولنطبق ما ذكر على المثالين الآتين

المثال الأول - المطلوب إيجاد أكبر حد في حل المقدار  $(ص + ب)^٧$   
إذا كان  $ص = ٥$  ,  $ب = ٣$

لذلك نحسب المقدار  $\frac{٣(١+٥)}{٥+٣}$  باعتبار أن  $٧ = ٥$  ,  $٣ = ب$  أى  
 $٣ = ب$  ,  $٣ = ص$  أى  $ص = ٥$  فنجد  $\frac{٣(١+٧)}{٣+٥} = ٣$

أى أن أكبر حدود الحل هما الحد الثالث والرابع وهما متساويان  
وبحسبان كل منهما نجد أنه ٦١١٦٢٥

المثال الثانى - المطلوب إيجاد أكبر حد في حل المقدار  $(ص + ب)^٧$   
إذا كان  $ص = ٤$  ,  $ب = ٣$

لذلك نحسب المقدار  $\frac{٣(١+٥)}{٥+٣}$  باعتبار أن  $٧ = ٥$  ,  $٣ = ب$   
و  $٣ = ص$  فنجد  $\frac{٣(١+٧)}{٤+٣} = \frac{٢٤}{٧} = \frac{٣}{٧}$  ويكون أكبر حد  
في حل المقدار المذكور هو الرابع وبحسابه نجد أنه ٢٤١٩٢

ويمكن إيجاد مقدار أكبر حد بالصفة التى استنتج بها قانون (٣٠٨)  
فلايجاد أكبر حد في حل المقدار  $(ص + ب)^٧$  بفرض أن  $ص = ٤$   
 $٣ = ب$  يقال معلوم أن  $(ص + ب)^٧ = ص^٧ (١ + \frac{ب}{ص})^٧$   
ومن حيث أن  $ص^٧$  يضرب في حد من مقدار  $(١ + \frac{ب}{ص})^٧$



فيكنى البحث عن أكبر حد من هذه الكمية ولذلك نرمز للحدين اللذين ترتيبهما  $\nu$  و  $\nu + 1$  من المقدار  $(1 + \frac{\nu}{\nu})^{\nu}$  بالحرفين  $\epsilon$  و  $\epsilon^-$  فيكون

$$\epsilon \times \frac{3}{4} (1 - \frac{\nu}{\nu}) = \epsilon^- \times \frac{\nu}{\nu} \times \frac{1 + \nu - \nu}{\nu} = \epsilon^-$$

وبناء عليه يكون  $\epsilon^- < \epsilon$  كلما كان  $(1 - \frac{\nu}{\nu}) < \frac{3}{4}$  أو

$$\text{أو } 1 - \frac{\nu}{\nu} < \frac{4}{4}$$

$$\text{أو } 1 + \frac{\nu}{4} < \frac{\nu}{\nu}$$

$$\text{أو } \frac{\nu}{4} < \frac{\nu}{\nu}$$

$$\text{أو } \nu < 24$$

$$\nu < \frac{24}{\nu}$$

والقيمة التي يجب أن تعطى الى  $\nu$  لتنطبق على ذلك هي ٣ وأكبر حد هو الرابع وهو عين ما تقدم في المثال الثاني

٣١٢ تنبيه في حل المقدار  $(\nu - \nu)$  تكون الحدود الزوجية الرتبة سالبة والفردية الرتبة موجبة وحينئذ فأى حد من الحدود الزوجية الرتبة يكون أصغر من قيمة أى حد من الحدود الفردية الرتبة ولكنه لا يقصد في تعيين أكبر حد الا القيمة المطلقة وحينئذ فلا حاجة لملاحظة العلامة في تعيين أكبر حد

مثلا لايجاد أكبر حد في حل المقدار  $(\nu - \nu)$  بفرض أن  $\nu = 5$  و  $\nu = 3$  نحسب المقدار  $\frac{\nu(1 + \nu)}{\nu + \nu}$  بفرض أن  $\nu = 8$  و  $\nu = 3$  فنجد

باعتبار القيمة المطلقة وبحسابه نجده - ٧٤٢٥٠٠٠٠  
 $\frac{27}{8} = \frac{3(1+8)}{8}$  ويكون أكبر الحدود هو الرابع

٣١٣ إيجاد مجموع المكررات في المقدار (١ + س)  $\textcircled{3}$   
 معلوم أن (١ + س)  $\textcircled{3} = 1 + 1س + 1س^2 + 1س^3 + 1س^4 + 1س^5 + 1س^6 + 1س^7 + 1س^8 + 1س^9 + 1س^{10} + 1س^{11} + 1س^{12} + 1س^{13} + 1س^{14} + 1س^{15} + 1س^{16} + 1س^{17} + 1س^{18} + 1س^{19} + 1س^{20} + 1س^{21} + 1س^{22} + 1س^{23} + 1س^{24} + 1س^{25} + 1س^{26} + 1س^{27} + 1س^{28} + 1س^{29} + 1س^{30} + 1س^{31}$   
 فإذا فرض أن س = ١ يكون  
 $\textcircled{3} = 1 + 1س + 1س^2 + 1س^3 + 1س^4 + 1س^5 + 1س^6 + 1س^7 + 1س^8 + 1س^9 + 1س^{10} + 1س^{11} + 1س^{12} + 1س^{13} + 1س^{14} + 1س^{15} + 1س^{16} + 1س^{17} + 1س^{18} + 1س^{19} + 1س^{20} + 1س^{21} + 1س^{22} + 1س^{23} + 1س^{24} + 1س^{25} + 1س^{26} + 1س^{27} + 1س^{28} + 1س^{29} + 1س^{30} + 1س^{31}$   
 أعني أن مجموع المكررات يساوي  $\textcircled{3}$  أن يساوي القوة النونية لعدد ٢  
 تنبيه إذا طرح من طرفي المتطابقة السابقة واحد نجد

$1 - \textcircled{3} = 1س^{32} + 1س^{33} + 1س^{34} + 1س^{35} + 1س^{36} + 1س^{37} + 1س^{38} + 1س^{39} + 1س^{40} + 1س^{41} + 1س^{42} + 1س^{43} + 1س^{44} + 1س^{45} + 1س^{46} + 1س^{47} + 1س^{48} + 1س^{49} + 1س^{50} + 1س^{51} + 1س^{52} + 1س^{53} + 1س^{54} + 1س^{55} + 1س^{56} + 1س^{57} + 1س^{58} + 1س^{59} + 1س^{60} + 1س^{61} + 1س^{62} + 1س^{63} + 1س^{64} + 1س^{65} + 1س^{66} + 1س^{67} + 1س^{68} + 1س^{69} + 1س^{70} + 1س^{71} + 1س^{72} + 1س^{73} + 1س^{74} + 1س^{75} + 1س^{76} + 1س^{77} + 1س^{78} + 1س^{79} + 1س^{80} + 1س^{81} + 1س^{82} + 1س^{83} + 1س^{84} + 1س^{85} + 1س^{86} + 1س^{87} + 1س^{88} + 1س^{89} + 1س^{90} + 1س^{91} + 1س^{92} + 1س^{93} + 1س^{94} + 1س^{95} + 1س^{96} + 1س^{97} + 1س^{98} + 1س^{99} + 1س^{100}$   
 ويؤخذ من هذا أن مجموع التوافق لاشياء عددها  $\textcircled{3}$  مأخوذة بجميع  
 الكيفيات الممكنة (بعضها أو كلها في كل مرة) أي مأخوذة واحداً  
 واحداً ثم اثنين اثنين وهكذا في كل مرة يساوي القوة النونية لعدد ٢  
 ناقصة واحداً

٣١٤ في المقدار (١ + س)  $\textcircled{3}$  مجموع مكررات الحدود الفردية  
 الرتبة يساوي مجموع مكررات الحدود الزوجية الرتبة

لأنه في المطابقة (١ + س)  $\textcircled{3} = 1 + 1س + 1س^2 + 1س^3 + 1س^4 + 1س^5 + 1س^6 + 1س^7 + 1س^8 + 1س^9 + 1س^{10} + 1س^{11} + 1س^{12} + 1س^{13} + 1س^{14} + 1س^{15} + 1س^{16} + 1س^{17} + 1س^{18} + 1س^{19} + 1س^{20} + 1س^{21} + 1س^{22} + 1س^{23} + 1س^{24} + 1س^{25} + 1س^{26} + 1س^{27} + 1س^{28} + 1س^{29} + 1س^{30} + 1س^{31}$   
 إذا جعل س = -١ يكون  
 $0 = 1 - 1س + 1س^2 - 1س^3 + 1س^4 - 1س^5 + 1س^6 - 1س^7 + 1س^8 - 1س^9 + 1س^{10} - 1س^{11} + 1س^{12} - 1س^{13} + 1س^{14} - 1س^{15} + 1س^{16} - 1س^{17} + 1س^{18} - 1س^{19} + 1س^{20} - 1س^{21} + 1س^{22} - 1س^{23} + 1س^{24} - 1س^{25} + 1س^{26} - 1س^{27} + 1س^{28} - 1س^{29} + 1س^{30} - 1س^{31}$   
 وعليه يكون  $1س^{32} + 1س^{33} + 1س^{34} + 1س^{35} + 1س^{36} + 1س^{37} + 1س^{38} + 1س^{39} + 1س^{40} + 1س^{41} + 1س^{42} + 1س^{43} + 1س^{44} + 1س^{45} + 1س^{46} + 1س^{47} + 1س^{48} + 1س^{49} + 1س^{50} + 1س^{51} + 1س^{52} + 1س^{53} + 1س^{54} + 1س^{55} + 1س^{56} + 1س^{57} + 1س^{58} + 1س^{59} + 1س^{60} + 1س^{61} + 1س^{62} + 1س^{63} + 1س^{64} + 1س^{65} + 1س^{66} + 1س^{67} + 1س^{68} + 1س^{69} + 1س^{70} + 1س^{71} + 1س^{72} + 1س^{73} + 1س^{74} + 1س^{75} + 1س^{76} + 1س^{77} + 1س^{78} + 1س^{79} + 1س^{80} + 1س^{81} + 1س^{82} + 1س^{83} + 1س^{84} + 1س^{85} + 1س^{86} + 1س^{87} + 1س^{88} + 1س^{89} + 1س^{90} + 1س^{91} + 1س^{92} + 1س^{93} + 1س^{94} + 1س^{95} + 1س^{96} + 1س^{97} + 1س^{98} + 1س^{99} + 1س^{100}$

٣١٥ يمكن استعمال نظرية ذات الحدين لبيان مقدار كمية  
تتضمن على أكثر من حدين

مثلا لايجاد مقدار  $(س^٢ + ٢س - ١)^٢$  نفرض أن  
 $س^٢ + ١$  حدا واحدا فيكون

$$\begin{aligned} &+ (س^٢ + ٢س - ١)^٢ (س^٢ + ١) + (س^٢ + ٢س - ١)^٣ \\ &+ ٣س^٢ (س^٢ + ٢س - ١)^٢ + (س^٢ + ٢س - ١)^٣ = ١ + ٦س + ٩س^٢ - ٤س^٣ - ٩س^٤ + ٦س^٥ + ١س^٦ \end{aligned}$$

تمارين ٧٠

ابحث عن ترتيب الحد الذي مكرره أكبر ما يمكن في حل ما يأتي

$$\begin{array}{l|l} ١٦(س + ١)(٤) & ٧٥(س + ١)(١) \\ ١١(س + ١)(٥) & ٣٣(س - ١)(٢) \\ ١٣(س + ١)(٦) & ٢٢(س + ١)(٣) \end{array}$$

أوجد ترتيب أكبر حد في حل كل من الكميات الآتية

$$(٧) (س + هـ)١٠ \text{ إذا كان } ٣ = هـ \text{ و } ٢ = س$$

$$(٨) (س - هـ)٢٨ \text{ » } ٩ = س \text{ و } ٤ = هـ$$

$$(٩) (س + ١)٦ \text{ » } ٤ = س \text{ » } ٣ = هـ$$

$$(١٠) (س - ١)١٣ \text{ » } ٨ = س \text{ و } ٢ = هـ$$

$$(١١) (س - ٢)١٧ \text{ » } س = \frac{١}{٢}$$

$$(١٢) (س + ١)٧ \text{ » } س = \frac{١}{٢}$$

$$(١٣) (س - \frac{٢}{٣})٨ \text{ » } س = \frac{١}{٣}$$

$$(١٤) (١ - ٢ \text{ سم})^٨ \text{ اذا كان سم} = ١$$

$$(١٥) (١ - \frac{١}{٢} \text{ سم})^٢ \gg \gg \text{ سم} = ١$$

$$(١٦) (٢ + \frac{٢}{٧} \text{ سم})^{١١} \gg \gg \text{ سم} = ١٤$$

$$(١٧) (١ - ٣ \text{ سم})^٩ \gg \gg \text{ سم} = \frac{١}{٢} \text{ و } ١ = ٢$$

$$(١٨) (٢ - ٣) \gg \gg ٣ = ٦$$

ما مقدار مجموع تكرات الحدود في حل المقادير الآتية

$$(١٩) (١ + \text{سم})^٧ \quad | \quad (٢٢) (١ + ٢ \text{ سم})^٨$$

$$(٢٠) (١ + \text{سم})^{١٠} \quad | \quad (٢٣) (\text{سم} + \text{سم})^{١٦}$$

$$(٢١) (١ + \text{سم})^{١٢} \quad | \quad (٢٤) (٣ \text{ سم} + \text{سم})^٩$$

(٢٥) برهن على أن مجموع تكرات الحدود الفردية في حل المقدار  $(١ + \text{سم})^٨$

يساوى مجموع تكرات الحدود الزوجية في حل المقدار  $(١ + \text{سم})^٨$

(٢٦) برهن على أن مجموع تكرات الحدود الزوجية الزتية في حل المقدار

$(١ + \text{سم})^٩$  يساوى مجموع تكرات الحدود الفردية في حل المقدار  $(١ + \text{سم})^٩$

المطلوب إيجاد مقادير الكميات الآتية

$$(٢٧) (٣ + ٥ + ٤) \quad | \quad (٣٠) (\text{سم}^٢ - ٤ \text{ سم} + ٢)^٣$$

$$(٢٨) (٣ - ٥ + ٤) \quad | \quad (٣١) (٣ + ٥ + ٢)^٤$$

$$(٢٩) (٣ + ٥ + ٢ + ١) \quad | \quad (٣٢) (٤ - ١ + ٢)^٤$$

(٣٣) في حل المقدار  $(١ + \text{سم})^{٢٥}$  مكر الخد الذي ترتيبه ٢ + ٥ = ١

مكر الخد الذي ترتيبه ٥ + ٥ أوجد مقدار

(٣٤) اذا كان مكر الخدين ١٦ و ٢٦ من حل المقدار  $(١ + \text{سم})^٣$

متساويين فما يكون مقدار

(٣٥) أوجد الخد الرأى من المبدأ والخد الرأى من النهاية في حل المقدار

$(٢ + \text{سم})^٣$

(٣٦) مكررا الحدين اللذين ترتيبهما  $٣ + ٢٦$  - ٣ من حل الكية  
 (١ + ٣) متساويان فأوجد الارتباط بين  $٦$  و

## الربح المركب

٣١٦ الربح المركب هو ربح المبلغ المقرض وأرباحه ففيه  
 يضاف ربح السنة الاولى الى رأس المال ويعتبر الناتج رأس مال جديد  
 في السنة الثانية ثم يضاف ربح هذا المبلغ الجديد اليه ويعتبر الناتج  
 رأس مال في السنة الثالثة وهكذا

وبواسطة ما ذكر يمكن حساب الربح المركب لأي مبلغ في عددنا  
 من السنين بالسعر المعين الا أن الحساب بهذه الطريقة يكون مطولا  
 خصوصا اذا كانت المدة كبيرة مثل عشرين سنة أو عشرين سنة  
 أو مائة سنة

وسنبين كيف تكون الأعمال الحسابية في ذلك سهلة وبسيطة  
 بواسطة قانون عام ثم تستنبط منه قوانين عامة لمسائل الأرباح المركبة  
 وتطبيق هذه القوانين على مسائل عديدة فنقول

٣١٧ حساب جملة الربح المركب بعد معرفة الزمن والسعر  
 نفرض أن مبلغ  $٣$  جنيهها مقترضا بالربح المركب بسعر  $\frac{١}{١٠}$  لسنين  
 عددها  $١$  ورمز للجملة بحرف  $٣$  ثم نقول اذا كان المبلغ المقرض جنيها  
 واحدا فان ربحه في السنة الاولى يكون  $\frac{١}{١٠}$  وجملته في هذه السنة هي  
 $١ + \frac{١}{١٠}$  فاذا رمز لهذا المجموع بحرف  $٣$  يكون ربحه في السنة

الثانية  $\frac{١٠٠}{١٠٠}$  وجملته في هذه السنة  $١٠٠ = \frac{١٠٠}{١٠٠} + ١$  (١)  $\frac{١٠٠}{١٠٠}$   
 $=$  ولما كان هذا المبلغ هو رأس المال في السنة الثالثة فربحه  
 فيها هو  $\frac{١٠٠}{١٠٠}$  وجملته فيها هي  $١٠٠ = \frac{١٠٠}{١٠٠} + ١$  (١)  $\frac{١٠٠}{١٠٠}$   
 $=$  وبالاتمرار على نحو ما ذكر الى مستين عددها  $١٠٠$  تكون جملة  
 الواحد فيها  $١٠٠$  وبناء فالمبلغ  $١٠٠$  تكون جملته مبينة بالوضع

$$١٠٠ = ١٠٠ \quad (١)$$

أعني أن جملة الربح المركب لمبلغ متساوى حاصل ضرب هذا المبلغ  
 في مجموع الواحد وربحه مرفوعا الى قوة بقدر عدد السنين

واذا طرح من هذه الجملة المبلغ الاصلى يكون الباقي هو الربح  
 المركب أى الربح المركب  $١٠٠ = ١٠٠ - ١٠٠$  (٢)  $(١ - \frac{١٠٠}{١٠٠})$   
 تطبيق - ما مقدار ما يؤل اليه مبلغ ١٥٠٠ جنيه مقترض بالربح  
 المركب لمدة ١٦ سنة بسعر ٥ %.

نضع في قانون (١) يدل الحروف مقاديرها فينتج

$$١٥٠٠ \times ١٦,٠٥ = ٢٤,٠٧٥$$

$$٢٤,٠٧٥ + ١٥٠٠ = ١٧٤,٠٧٥ \quad \text{أو}$$

$$١٧٤,٠٧٥ + ٣,١٧٦,٠٩ = ٣,٣٥٠,٢٦٩ \quad \text{أو}$$

$$٣,٣٥٠,٢٦٩ \quad \text{وبناء عليه يكون}$$

$$٣,٣٧٤,٣٨ = ٣٢٧٤,٣٨ \quad \text{وهو مقدار الجملة}$$

وحينئذ يكون مقدار الربح المركب  $٣٢٧٤,٣٨ - ١٥٠٠$

$= ١٧٧٤,٣٨$  جنيتها ويصح أن نبحث عن مقدار  $١٦,٠٥$  بواسطة  
 اللوغاريتم فنجد

$17,05 = 2,18295$  ثم نضربه في ١٥٠٠ فينتج  
 $3274,425$  جنيتها وهو مقدار لا يفتقر عن السابق الا بمقدار  
يسير وهذا الفرق ناشئ من اللوغاريتمات اذ هي بدرجة تقريبية خصوصا  
في الجداول ذات الارقام القليلة العدد

٣١٨ حساب المبلغ بعد معرفة الجملة والزمن والسعر  
تأخذ القانون (١) وهو

$$C = M \times \frac{P}{100} \text{ ونستخرج منه مقدار } M \text{ فنجد}$$

$$\frac{C}{\frac{P}{100}} = M \quad (3)$$

تطبيق - ما مقدار المبلغ المقرض بالربح المركب بسعر ٥٪ حتى  
آل بعد ١٦ سنة الى جملة قدرها ٣٢٧٤,٣٨ جنيتها

لذلك نضع في قانون (٣) بدل المعاليم مقاديرها فينتج

$$M = \frac{3274,38}{17,05} \text{ ثم تأخذ لوغاريتم الطرفين فينتج}$$

$$M = 192,05 \text{ لو } 16 \text{ لو } 17,05 \text{ او}$$

$$M = 192,05 \text{ لو } 16 \times 17,05 \text{ او}$$

$$M = 192,05 \text{ لو } 16 \times 17,05 \text{ ثم نبحث عن العدد المقابل لهذا اللوغاريتم}$$

فيكون  $M = 1500$  جنيه

٣١٩ ( تنبيه ١ ) قد يطلق على المبلغ المقرض القيمة الحالية  
بالنسبة للجملة

(تنبيه ٢) يستعمل القانون (٣) في حساب الخطيطة الداخلية اذا كانت بالرجح المركب فتعتبر فيه الجملة هي القيمة الاسمية والمبلغ هو القيمة الحالية ومحاسبها وطرحها من الجملة تنتج الخطيطة الداخلية المطلوبة

٣٣. حساب الزمن بعد معرفة المبلغ المقرض والجملة والسعر

لذلك نأخذ قانون (١) وهو

$$٥ = م \div م \text{ ثم نأخذ لو غاريتم الطرفين فينتج}$$

$$لو ٥ = لو م + م \div لو ٥ \text{ نستخرج } \div \text{ فنجد}$$

$$\div = \frac{لو ٥ - لو م}{لو م} \quad (٤)$$

تطبيق - مبلغ ١٥٠٠ جنيهه مقرض بسعر ٥٪ آل الى جملة

قدرها ٣٢٧٤,٣٨ جنيها والمطلوب معرفة الزمن

نضع في قانون (٤) بدل المعاليم مقاديرها فنجد

$$\text{أو} \quad \frac{لو ٣٢٧٤,٣٨ - لو ١٥٠٠}{لو ١٥٠٠} = \div$$

$$\text{أو} \quad \frac{٣,١٧٦,٠٩ - ٣,٥١٥,١٣}{٥٠٢,١١٩} = \div$$

$$\div = ١٦ \text{ سنة}$$

٣٣١ حساب السعر بعد معرفة المبلغ والجملة والزمن لذلك نأخذ

القانون (١) وهو

$$٥ = م \div م \text{ ثم نأخذ لو غاريتم الطرفين فنجد}$$

$$لو ٥ = لو م + م \div لو ٥ \text{ ومنه}$$

$$\text{لو} = \frac{لو ٥ - لو م}{\div} \quad (٥)$$



وبواسطة هذا القانون يمكن حساب مقدار  $r$  ويطرح واحد منه وضرب الباقي في ١٠٠ ينتج السعر

تطبيق - بأى سعر اقترض مبلغ ١٥٠٠ جنيه حتى آل الى جملة قدرها ٣٢٧٤,٣٨ جنيها بالربح المركب في مدة ١٦ سنة

نضع في قانون (٥) السابق بدل المعاليم مقاديرها فينتج

$$r = \frac{3274.38 - 1500}{16} \text{ أو}$$

$$r = \frac{3274.38 - 1500}{16}$$

$$r = 0.2119 \text{ بالبحث عن العدد المقابل له نجد}$$

$$r = 1.05 \text{ وبناء عليه يكون}$$

ربح الواحد هو ٠,٠٥ وبضربه في ١٠٠ ينتج ٥ وهو السعر المطلوب

**٣٣٣ تنبيهات - الاول -** اذا كان الزمن مبينا بستين وأشهر فاما أن تحسب جملة الربح المركب للسنتين الكاملة ثم يستخرج ربح هذه الجملة ويضاف اليها واما أن يعتبر عدد الأشهر كسرا من السنة

**الثاني -** قد يراد في بعض الأحيان أن يضاف الربح كل ستة أشهر ففي هذه الحالة يوضع في القوانين السابقة بدل ٥ ضعف عدد السنين وبدل  $r$  مقدار مجموع الواحد وربحه في ٦ أشهر

وكذا اذا أريد أن تكون الاضافة كل أربعة أشهر فيوضع بدل ٥ ثلاثة أمثال عدد السنين وبدل  $r$  مجموع الواحد وربحه في ٤ أشهر وقس على هذا اذا أريد أن تكون الاضافة كل ثلاثة أشهر أو غيرها

الثالث - قد يعطى فى منطق السؤال لوغاريتمات بعض أعداد وبواسطة ذلك وملاحظة قواعد الوغاريتمات ملاحظة جيدة تستبطن اللوغاريتمات المطلوبة أو الأعداد المقابلة للوغاريتمات وعلى الطالب أن يلاحظ كل ذلك فى حل بعض التمرينات الآتية

٣٣٣ يمكن بواسطة قانون الرمح المركب حساب ما يؤل إليه عدد سكان مدينة بعد عدد معين من السنين إذا علم تعدادها الأصلي وفرض أنها تزيد فى كل سنة بنسبة معينة من عدد السكان

لأنه إذا فرض أن تعداد مدينة هو  $m$  أنفس وأن تعدادها يزيد فى كل سنة بمقدار  $\frac{1}{100}$  بالنسبة لعدد السكان فى السنة التى قبلها فإن تعدادها بعد سنة يكون  $m + \frac{1}{100}m$  أو  $m(1 + \frac{1}{100})$  وبعد سنتين يؤل  $m(1 + \frac{1}{100})^2 = m(1 + \frac{2}{100} + \frac{1}{10000})$  وبالاتسار على ذلك الى سنتين عددها  $m(1 + \frac{2}{100} + \frac{1}{10000})$  يكون جملة تعداد السكان مبينا بالقانون

$$m(1 + \frac{2}{100} + \frac{1}{10000})$$

فاذا رمز لجملة التعداد بحرف  $s$  وللقدر  $1 + \frac{2}{100}$  بحرف  $r$  يكون

$$s = m r^2$$

وهو عين قانون جملة الرمح المركب السابق وليلاحظ أن  $r$  فى هذا القانون هو عبارة عن مقدار ما يؤل إليه الواحد من عدد السكان فى السنة (وهو مقدار وهمى فرض للتوصل للطلب)

تطبيق - سكان مدينة ٥٠٠٠ نفس وتعدادها يزيد في كل سنة بمقدار ٠.٢٪ والمطلوب معرفة ما يؤول اليه عدد السكان بعد ١٠ سنين لذلك نستعمل القانون السابق فنجد

$$٢ = ٢ \text{ نضع بدل الحروف مقاديرها}$$

$$١,٢١٩ \times ٥٠٠٠ = ٢$$

ثم نبحث عن مقدار ١,٢١٩ بواسطة اللوغاريتم فنجد أنه ١,٢١٩ ويكون

$$١,٢١٩ \times ٥٠٠٠ = ٢ \text{ أو}$$

$$٦٠٩٥ = ٢ \text{ نفسا}$$

٣٣٤ تنبيه - بواسطة هذا القانون تحسب مقادير احدى الكميات م، و، كما تقدم في قوانين الارباح المركبة

### تمرين ٧١

( ١ ) ما مقدار جملة الربح المركب لمبلغ ٦٠٠٠ جنيه لمدة ١٢ سنة بسعر ٥٪

( ٢ ) ما مقدار الربح المركب لمبلغ ٥٠٠٠ جنيه لمدة ١٥ سنة بسعر ٦٪

( ٣ ) مبلغ ١٠٠٠ جنيه مقرض بالربح المركب لمدة ٥ سنين بسعر ٥٪ واذا لم

يسدد في نهايتها بسعر ٦٪ في الخمس سنين التالية وبسعر ٧٪ في الخمس سنين

التالية فما مقدار ما يؤول اليه المبلغ المذكور بعد ١٥ سنة

( ٤ ) احسب الربح المركب لمبلغ ١٥٠٠ جنيه في مدة ٣ سنين على حساب ٢٪

من كل ٤ أشهر وأن تضاف الارباح كل أربعة أشهر

( ٥ ) وضع مبلغ ١٠٠٠ جنيه في بنك في أول سنة ١٨٨٢ ليربح ربها مرثا

بشعر ٤٪ فما مقدار ما يؤول اليه هذا المبلغ في نهاية سنة ١٩١١ بعد معرفة أن

$$١٠٤ = ٣٣٣ \cdot ١٧٠ \cdot ٢٠ \text{ ولو } ٨٨٨, ٣٣ \cdot ٢٢٤ = ١٠٩٩٩٠ \cdot ٤$$

(٦) ما مقدار القيمة الحالية للمبلغ ٩٧٦و٦ جنبها مقترض بالربح المركب بسعر ٤و٥ ٪ لمدة ٦ سنين

(٧) ما مقدار المبلغ المقترض بسعر ٨ ٪ حتى آل الى جملة قدرها ٦٠٠٠ جنبه في مدة ٢٠ سنة بفرض أن لو  $٣٠١٠٣ = ٣$  ولو  $٤٧٧١٢ = ٠$  ولو  $١٢٨٧ = ١٠٩٧٥$

(٨) ما مقدار القيمة الحالية لمبلغ ٣٠٠٠ جنبه يستحق الدفع بعد ١٢ سنة بالارباح المركبة وأن يكون السعر ٣ ٪ في ثلاث السنين الاولى ثم بزيادة ١ ٪ في كل ٣ سنين بالتوالي

(٩) ما مقدار المبلغ الذي اذا وضع في بنك ليربح ربها مركبا بسعر ٣ ٪ تبلغ أرباحه في ١٥ سنة مبلغا قدره ٢٠ جنبها

(١٠) ما مقدار الحظيطة الداخلية لمبلغ ١٦ شلن و ١٦١ جنبها انجليزي يستحق الدفع بعد سنتين بسعر ٦ ٪ بحساب الارباح المركبة

(١١) حسب المدة التي فيها الربح المركب لمبلغ ٤٥٠٠ جنبه بسعر ٣ ٪ هو ١٦ جنبها

(١٢) مبلغ ٥٠٠ جنبه انجليزي مقترض بالربح المركب بسعر ٦ ٪ آل الى جملة قدرها ٣٥١ جنبها انجليزي و ١٦ شلن أوجد المدة

(١٣) ما هو المدة التي يؤول فيها أى مبلغ مقترض بالربح المركب الى عشرة أمثال قيمته الاصلية اذا كان السعر ٥ و ٥ ٪ مع العلم بأن لو  $١٠٥٥ = ٢٥٢٥ ٢٣ و ٣$

(١٤) ما هو السعر المقترض به مبلغ ١٠٠٠ جنبه لمدة ١٢ سنة بالربح المركب حتى آل الى جملة قدرها ١٩٠٤ جنبه

(١٥) ما هو السعر المقترض به ٢٠٠٠ جنبه لمدة ٥ سنين بالربح المركب حتى آل الى جملة قدرها ٢٨٩٤ جنبه وكانت اضافة الارباح كل ٤ أشهر

(١٦) ما السعر المقترض به ٨٠٠٠ جنبه بالربح المركب حتى آل الى ١٢٤٢٠ جنبها في ١٠ سنين

(١٧) أوجد السعر المقرض به مبلغ ٢٠٠٠ جنيه بالربح المركب مدة عشرين سنة حتى آل الى ١٢٠٠٠ جنيه مع العلم بأن لو  $2 = 0.30103$  ولو  $3 = 0.47712$  ولو  $109625 = 0.3891$

(١٨) اذا علم أن الربح المركب لمبلغ ٣٠٠ جنيه في مدة أربع سنين ٧٨ و ٧ جنبها فما اذا تكون جملة ١٠٠٠ جنيه في ١٠ سنين بالسعر عينه

(١٩) شخص اقترض مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه لمدة خمس سنوات بسعر ٥ و ٣ / ١٠ ثم اقترض نصف هذا المبلغ لشخص بسعر ٥ و ٤ / ١٠ لمدة ٤ سنوات ولاخر باقية لمدة ٤ سنوات أيضا بسعر ٥ و ٣ / ١٠ فما فائدته من ذلك

(٢٠) اقترض مبلغ بالربح المركب فكان ربحه في آخر السنة الاولى ٨١ جنبها وفي آخر السنة الثانية ٨٦ و ٨٥ جنبها والمطلوب معرفة الربح المركب لهذا المبلغ في ٥ سنين بالسعر عينه

(٢١) ماهو السعر الذى يقترض به أى مبلغ حتى يكون مقدار الربح المركب مساويا لرأس المال في مدة ١٠ سنين

(٢٢) اذا كان عدد سكان دولة ٤ مليون قسم وكان هذا العدد يزيد في كل سنة بمقدار  $\frac{1}{4} \%$  (  $\frac{1}{4} \%$  ) من عدد السكان في السنة السابقة لحافا يقول اليه عدد سكانها بعد قرن كامل

(٢٣) مدينتان يبلغ تعداد سكان احدهما ٢٠٠٠٠٠٠ نفس والاخرى ٣٠٠٠٠٠٠٠ نفس فاذا فرض أن الاولى تزيد بمقدار  $\frac{1}{4} \%$  في السنة أى (  $\frac{1}{4} \%$  ) من عدد السكان والثانية تزيد بمقدار  $\frac{1}{3} \%$  في السنة أى (  $\frac{1}{3} \%$  ) من عدد سكانها فبعد كم سنة يتساوى عدد سكان المدينتين

(٢٤) كان تعداد القطر المصرى في سنة ١٨٩٧ هو ٩٧١٧٢٢٨ نفسا وفى سنة ١٩٠٧ هو ١١٢٨٧٣٥٩ نفسا أوجد النسبة في المائت لزيادة عدد السكان سنويا مع العلم بأن لو  $11287359 = 0.526309$  ولو  $9717228 = 0.4424 = 0.1015$

(٢٥) تعداد القطر المصري في ١٩٠٧ هو ١١٢٨٧٣٥٩ نفسا فإ يكون تمددها إن شاء الله تعالى في سنة ١٩١٧ على فرض أن النسبة في المائة لزيادة عدد السكان تكون ١,٥١ ٪ ومع العلم بأن لو  $11287359 = 7,0526309$  لو  $10101 = 490065088$  ولو  $1311305 = 13117189$

## الدفعة

٣٣٥ تمهيد إذا اقترض شخص مبلغا بالربح المركب لمدة معينة وأراد تسديدها المبلغ وأرباحه في تلك المدة بأقساط سنوية متساوية فيسمى كل قسط منها دفعة سنوية

وكذا إذا أودع شخص مبلغا في مصرف بالربح المركب لمدة معينة وأراد أن يأخذ هذا المبلغ وأرباحه في تلك المدة بمقادير متساوية يأخذها كل سنة فيسمى كل مقدار منها دفعة سنوية

وليس الفرض في الحالتين أن يحسب ربح المبلغ كله ويقسم على عدد السنين إنما الفرض أنك إذا حسبت جملة المبلغ في السنة الأولى وطرحته منها الدفعة الأولى ثم حسبت جملة الباقي وطرحته منه الدفعة الثانية وهكذا إلى آخر السنين كانت الدفعة الأخيرة هي الباقي في السنة الأخيرة وأرباحه فيها

وقد يتفق على أن يكون استلام الدفعة كل سنة أشهر أو كل أربعة أشهر أو كل ثلاثة أشهر أو أقل من ذلك وحينئذ فتحل هذه المدة محل السنة

والدفعة إما أن تستمر لزمن محدد كما في المثالين السابقين وإما أن تكون مستمرة الى غير نهاية مثل الدفعة التي تستغل من ايجار أراضى الزراعة أو ايجار العقارات وإما أن يبتدأ في دفعها عقب سنين معينة وتسمى دفعة مؤجلة ومما ذكر يستنتج التعريف الآتى

٣٣٦ الدفعة هي مبلغ ثابت يدفع في أوقات مخصوصة بشروط معينة في مقابلة مبلغ آخر محسوب بالربح المركب والدفعة إما أن تعطى في كل سنة مرة أو أكثر من مرة وإذا لم يبين ذلك تعتبر أنها دفعة سنوية والقيمة الحالية هي المبلغ الذى يقتضى أو يودع للحصول على الدفعة السنوية

٣٣٧ حساب مجموع الدفع - اذا فرض أن مبلغا مقترضا بالربح المركب بسعر  $\frac{1}{100}$  لستين عددها ٥ وأن الدفعة السنوية التى يسدد بها هذا المبلغ هي  $s$  ورمز لمجموع الواحد وربحه في السنة بحرف  $r$  وأريد حساب مجموع الدفع السنوية يقال

اذا فرض أن الدفع لم تسدد في مواعيدها وحسبت بالارباح المركبة بالسرعينه فان جملة الدفعة الاولى لستين عددها ٥ - ١ هي  $s \cdot \frac{1}{100}$  وجملة الدفعة الثانية لستين عددها ٥ - ٢ هي  $s \cdot \frac{2}{100}$  وجملة الدفعة الثالثة لستين عددها ٥ - ٣ هي  $s \cdot \frac{3}{100}$  وهكذا وجملة الدفعة التى قبل الأخيرة بثلاث ستين هي  $s \cdot \frac{3}{100}$

$$r s \dots + r^{1-2} s + r^{1-2} s + r^{1-2} s = p \quad \text{يكون}$$

وما بين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول واحد وأساسها  $r$  فإذا استبدل هذا المجموع بمقداره (٢٨٣)

لذلك نضع في قانون (١) بدل المعاليم مقاديرها

ثم نبحث عن مقدار  $10,6$  بواسطة اللوغاريتم فنجد  $10,6 = 2,397$  نضع هذا المقدار بدلا عن  $10,6$

او  $5 = 3,322,372$  جنیبا



٣٣٨ حساب القيمة الحالية لدفعة سنوية مستمرة الدفع  
لسنين معينة بسعر معلوم بحساب الربح المركب

نفرض أن  $s$  الدفعة السنوية و  $r$  مجموع الواحد و  $n$  في سنة  
واحدة و  $d$  عدد السنين و  $m$  القيمة الحالية المطلوبة ثم يقال  
القيمة الحالية للدفعة  $s$  التي تستحق الدفع بعد سنة هي  $\frac{s}{r}$  أو  $s^{-1}$   
والقيمة الحالية للدفعة  $s$  التي تستحق الدفع بعد سنتين هي  $\frac{s}{r^2}$   
أو  $s^{-2}$  والقيمة الحالية للدفعة  $s$  التي تستحق الدفع بعد ثلاث سنين  
هي  $s^{-3}$  وهكذا ومن حيث إن مجموع القيم الحالية لهذه الدفعة هو  
القيمة الحالية المطلوبة المرموز لها بحرف  $m$

$$\text{فيكون } m = s^{-1} + s^{-2} + s^{-3} \dots \text{ حدود}$$

$$\text{أو } m = s^{-1} + s^{-2} + s^{-3} \dots \text{ حدود}$$

وما بين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها  
الاول  $s^{-1}$  وأساسها  $s^{-1}$  فإذا استبدل هذا المجموع بمقداره (٢٨٤)

$$\text{ينتج } m = s^{-1} \cdot \frac{(s^{-1} - 1)}{1 - s^{-1}}$$

وبضرب حدى الكسر في  $s$

$$\text{ينتج } m = \frac{s^{-1} - 1}{1 - s^{-1}} \cdot s \dots \dots \dots (٢)$$

وهذا هو القانون الذي تحسب بواسطته القيمة الحالية أى المبلغ  
الذى يقتضى أو يودع في مصرف للحصول على دفعة سنوية معلومة  
المقدار بسعر معين في زمن محدود

تطبيق - مامقدار القيمة الحالية لدفعة سنوية مقدارها ١٦٠ جنيها  
تستمر مدة ١٥ سنة بسعر ٦٪

نضع في قانون (٢) بدل المعاليم مقاديرها

$$\frac{100 - (1 - 1.06)^{15}}{0.06} = ٢ \quad \text{فينتج}$$

ثم نبحث عن مقدار ١,٠٦<sup>١٥</sup> فنجد أنه عبارة عن ١,٤١٧٢١

$$\frac{(1 - 1.06)^{15}}{0.06} = ٢ \quad \text{فيكون}$$

$$١٥٥٤,١٠٦ = ٢ \quad \text{أو جنيها}$$

٣٢٩ القيمة الحالية لدفعة مستديمة - إذا كان عدد السنين ∞  
غير محدود فإن القانون (٢) وهو

$$\frac{(1 - r^{-n})}{1 - r} = ٢$$

$$\frac{1 - r^{-n}}{1 - r} - \frac{r}{1 - r} = ٢ \quad \text{يمكن وضعه}$$

والكسر الثاني يأخذ في الصغر كلما كبر مقدار ∞ وحينئذ فتى كان  
∞ غير منته ينعدم هذا الكسر ويصير

$$\frac{r}{1 - r} = ٢ \quad \text{(٣) ... ..}$$

تطبيق - مامقدار القيمة الحالية لدفعة دائمية مقدارها ١٢٠ جنيها  
في السنة على حساب ٦ ٪

نضع في قانون (٣) بدل الحروف مقاديرها

$$\frac{120}{0.06} = ٢ = ٢٠٠٠ \quad \text{فينتج جنيها}$$

وفي الواقع أن ربح ٢٠٠٠ جنيه في السنة بسعر ٠.٦٪ هو ١٢٠  
جنيهاً فإدام مبلغ ٢٠٠٠ جنيه موضوعاً في مصرف بسعر ٠.٦٪  
يتحصل منه إيراد سنوى ١٢٠ جنيهاً

٣٣٣. بواسطة القانون (٢) يمكن حساب كل من  $s$  و  $d$  متى  
عُلمت باقى الكميات

أولاً - حساب الدفعة اذا عُلمت القيمة الحالية والزمن والسعر  
تأخذ قانون (٢).

$$\frac{(d - s)}{1 - v} = m \quad \text{وهو}$$

$$(d - s) = m(1 - v) \quad \text{نحذف المقام فينتج}$$

$$\frac{(1 - v)^m}{v - 1} = s \quad \text{نقسم الطرفين على مكرر فينتج} \quad (٤) \dots \dots \dots$$

تطبيق - ما مقدار الدفعة السنوية التى تعطى مدة ١٥ سنة  
فى مقابلة مبلغ ١٠٦,١٥٤ جنيهاً بسعر ٠.٦٪

نضع فى قانون (٤) بدل الحروف مقاديرها

$$\frac{0.06 \times 106.154}{1 - 0.94} = s \quad \text{فينتج}$$

ثم نبحث عن مقدار ٠.٩٤ بواسطة اللوغاريتم فنجد ١٧٢١,٤  
نضع هذا المقدار بدله

$$\frac{0.06 \times 100410.6}{0.241721-1} = s \quad \text{فيلتج}$$

$$\frac{9324636}{0.208279} = s \quad \text{أو}$$

$$s = 159,98 \text{ جنيها أو } 160 \text{ جنيها تقريبا}$$

ثانيا - حساب الزمن اذا علمت الدفعة والقيمة الحالية والسعر  
تأخذ قانون (٢)

$$\frac{s(1-v^n)}{1-v} = m \quad \text{وهو}$$

ونضرب البسط والمقام في  $\frac{1}{v}$

$$\frac{s(1-v^n)}{(1-v)} \cdot \frac{1}{v} = m \cdot \frac{1}{v}$$

$$m(1-v) = s(1-v^n) \quad \text{نحذف المقام فيلتج}$$

$$s = m(1-v) \quad \text{أو}$$

نأخذ  $\frac{1}{v}$  مضروبا مشتركا

$$s = m(1-v)$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\log s = \log m + \log (1-v)$$

$$\log s - \log m = \log (1-v) \quad \text{ومنه} \quad \frac{\log s - \log m}{\log (1-v)} = n \quad (5) \dots$$

تطبيق - في كم سنة يمكن تسديد مبلغ ١٠٦,٥٥٤ جنيها مقترضا  
بسعر ٠.٦٪ بدفع سنوية مقدار الواحدة منها ١٦٠ جنيها

نضع في قانون (٥) السابق بدل الحروف مقاديرها

$$\text{فينتج} \quad \frac{\text{لو } ١٦٠ - \text{لو } (١٦٠ - ١٠٦ \times ١٥٥ \frac{١}{٦})}{\text{لو } ١٠٦} = \text{د} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\text{لو } ١٦٠ - \text{لو } ٦٦,٧٥٣٦٤}{\text{لو } ١٠٦} = \text{د} \quad \text{أو}$$

$$\frac{١,٨٢٤٤٥ - ٢,٢٠٤١٢}{٥,٠٢٥٣١} = \text{د} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\text{د}}{١٥ \text{ سنة}} = \text{د} \quad \text{أو}$$

٣٣١ تنبيه (١) يمكن حساب القيمة الحالية بواسطة قانون مجموع الدفع (٣٢٧) لانه اذا لوحظ أن مجموع الدفع يساوى القيمة الحالية مع ربحها المركب وأن جملة القيمة الحالية هي م د

$$\text{فيكون} \quad \frac{\text{د} (1 - \frac{\text{د}}{\text{ر}})}{1 - \frac{\text{د}}{\text{ر}}} = \text{م د}$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{\text{د} (1 - \frac{\text{د}}{\text{ر}})}{(1 - \frac{\text{د}}{\text{ر}}) \frac{\text{د}}{\text{ر}}} = \text{م} \quad \text{... .. (٦)}$$

وهذا القانون هو عين قانون (٢) بعد ضرب البسط والمقام في د ويمكن أن يستنتج منه مقدار كل من د و د بطريقتة مشابهة لما تقدم بنمرة (٣٣٠)

٣٣٢ تنبيه (٢) ما تقدم ذكره بنمرتي (٣٢٨) و (٣٣٠) يسمى بالاستهلاك أى استهلاك سلفة مقترضة في مدة معينة من السنين. والقوانين التي ذكرت بها مفيدة جدا في حساب الاستهلاك

٣٣٣ \* الدفعة المؤجلة هي التي يتبدأ في دفعها بعد اقتراض مبلغ (أو وضعه في مصرف) بمدة أكثر من سنة

٣٣٤ \* يمكن إيجاد القيمة الحالية للدفعة المؤجلة بطريقة مشابهة لما تقدم بخره ٣٢٨ أى بواسطة متوالية هندسية حدها الاول يكون هو القيمة الحالية للدفعة غير أنه يلاحظ أنها تدفع بعد عدد معين من السنين فإذا فرض أن المطلوب إيجاد القيمة الحالية للدفعة  $s$  التي يؤجل دفعها عقب سنين عددها  $h$  ثم تدفع الى سنين عددها  $\infty$  يقال

القيمة الحالية للدفعة الاولى هي  $\frac{s}{h}$  والقيمة الحالية للدفعة الثانية هي  $\frac{s}{h+1}$  وهكذا وحينئذ فالقيمة الحالية المطلوبة نحصل عليها بجمع السلسلة  $\frac{s}{h} + \frac{s}{h+1} + \frac{s}{h+2} + \dots$  وهكذا الى  $\infty$  حدود فإذا رمز لمجموع هذه الحدود بحرف  $\infty$  وأخذ  $\frac{s}{h}$  مضروباً مشتركاً ينتج

$$\infty = \frac{s}{h} (1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} + \dots) \text{ وهكذا الى } \infty \text{ حدود}$$

يحسن ترك دراسة كل ما وجد عليه هذه العلامة (\*) من هذا البحث في أول مرة لانه لم يشترط دراسته في برنامج التعليم الثانوى وانما أتيابه لاتمام الفائدة ولربما يترآى للدرس لزومه

ومن حيث ان مابين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول واحد وأساسها  $\frac{1}{r}$  وعدد حدودها  $n$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 - \frac{1}{r}} \times \frac{s}{r} = P \quad \text{فيكون}$$

ثم نحلل الكسر الاول الى عاملين أحدهما  $\frac{1}{r}$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 - \frac{1}{r}} \times \frac{1}{r} \times \frac{s}{1 - \frac{1}{r}} = P \quad \text{فيكون}$$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 - \frac{1}{r}} \times \frac{s}{1 - \frac{1}{r}} = P \quad \text{أو}$$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 - \frac{1}{r}} \times \frac{s}{1 - \frac{1}{r}} = P \quad \text{أو}$$

$$(6) \quad \left(1 + \frac{s}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)^n - 1 + \frac{s}{r}\right) \times \frac{s}{1 - \frac{1}{r}} = P \quad \text{أو}$$

تطبيق - المطلوب حساب المبلغ الذي يمكن تسديده مع أرباحه بسعر ٤ ٪ بست دفع متساوية كل منها ١٠ جنيهات اذا كانت الدفعة الاولى تدفع بعد ١٠ سنين من استلام المبلغ

نضع في قانون (٦) بدل الحروف مقاديرها

$$\left(1 + \frac{s}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)^n - 1 + \frac{s}{r}\right) \times \frac{s}{1 - \frac{1}{r}} = P \quad \text{فينتج}$$

ثم نبحث عن مقدار  $\frac{s}{r}$  بمقادير  $1 + \frac{s}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)^n$  بواسطة اللوغاريتم

$$\text{فنجد } \frac{s}{r} = 0.07031 = 1 + \frac{s}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0.00009$$

$$\text{وحيث أن يكون } > 250 = (0,7031 - 0,5559)$$

$$\text{أو } > 250 \times 0,1472$$

$$\text{أو } > = \frac{\text{مليج}}{800} \frac{\text{جنيه}}{36}$$

٣٣٥ \* الدفعة المتجمدة - (الوضع السنوى) اذا استمر شخص على وضع مبلغ ثابت كل سنة لمدة معينة من السنين بالربح المركب فان ماتول اليه هذه المبالغ وأرباحها يسمى جملة الدفعة المتجمدة

٣٣٦ \* حساب جملة الدفعة المتجمدة - اذا وضع شخص مبلغا معيناً مقداره م في نهاية كل سنة بسعر ٤٪ واستمر على ذلك مدة ٥ سنين ورمز لمجموع الواحد وربحه في السنة بحرف r وجملة ماتول اليه الدفع بحرف s نجد ما يستحقه في نهاية السنة الاولى هو المبلغ م وما يستحقه في نهاية السنة الثانية هو م مع جملة م في سنة أى م + م r أو م (١ + r) وجملة ما يستحقه في نهاية السنة الثالثة هو م مع جملة المستحق لغاية السنة الثانية الذى هو م (١ + r) أعنى م + م (١ + r) = م + م r + م r + م r = م (١ + r) وبلا استمرار على نحو ما ذكر الى سنين عددها ٥

$$\text{يكون } > = م (١ + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots) \text{ الى حدود } (٥)$$

وما بين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول ١ وأساسها r فاذا استعيض بمقداره

$$\text{يكون } > = م \frac{(1 - r^5)}{1 - r} \quad (٧) \quad \dots \dots \dots$$



تطبيق - شخص يوفر كل سنة ١٠ جنيهات ويضع هذا المبلغ في انتهاء السنة في بنك توفير بسعر ٢,٥٪ فما جملة ما يوفره في ١٥ سنة نضع في قانون (٧) بدل الحروف مقاديرها

$$\text{فنجد} \quad \frac{(1 - \frac{10}{100 \times 25}) 10}{0.025} = \text{م}$$

ثم بحث عن مقدار ١٠,٢٥ بواسطة اللوغاريتم فنجد أنه يساوي ١,٤٤٨ واذن

$$\text{يكون} \quad \frac{0.2448 \times 10}{0.025} = \text{م} = 97.92 \text{ جنيه}$$

٣٣٧ \* تنبيه (١) من قانون (٧) يمكن أن يستخرج مقدار كل من م و د اذا علمت باقي الكميات

أولا لحساب م نأخذ القانون (٧)

$$\text{وهو} \quad \frac{(1 - \frac{r}{100})^n}{1 - \frac{r}{100}} = \text{م}$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{(1 - \frac{r}{100})^n}{1 - \frac{r}{100}} = \text{م} \quad (٨) \dots \dots \dots$$

ثانيا لحساب د نأخذ القانون (٧)

$$\text{وهو} \quad \frac{(1 - \frac{r}{100})^n}{1 - \frac{r}{100}} = \text{م}$$

$$\text{ونحذف المقام فينتج} \quad \text{م} - \frac{\text{م}}{1 - \frac{r}{100}} = \text{م}$$

$$\text{أو} \quad \frac{\text{م}}{1 - \frac{r}{100}} = \text{م} + (1 - \frac{r}{100}) \text{م}$$

$$\text{أو } \frac{٢ + (١ - \text{ر}) \text{ح}}{\text{م}} = \text{د}$$

وبأخذ لو غاريم الطرفين نجد

$$\text{د لو ر} = \text{لو} [\text{ح} + (١ - \text{ر}) \text{م}] - \text{لو م}$$

$$\text{ومنه } \text{د} = \frac{\text{لو} [\text{ح} + (١ - \text{ر}) \text{م}] - \text{لو م}}{\text{لو ر}} \dots \dots (٩)$$

٣٣٨ \* تنبيه (٢) قد بنينا حساب القانون (٧) على أن الدفعة كانت توضع آخر كل سنة وحينئذ فالدفعة الأخيرة أى التى توضع فى نهاية السنة التونية لا يمكن لها ربح مطلقا

أما اذا فرض أن الوضع كان فى أول كل سنة (أى اعتبر وقت وضع المبلغ هو أول السنة) كانت كل دفعة لها أرباح بمقدار ماتمكته والدفعة الأخيرة يكون لها ربح سنة واتباع الرموز المتقدمة فى (٣٣٦) وملاحظة أن ما يستحقه الواضع فى نهاية السنة الأولى هو م ر تكون جملة الدفع المتجمدة هى

$$\text{ح} = \text{م} (\text{ر} + \text{ر}^٢ + \text{ر}^٣ + \dots \dots \text{الى د حدود})$$

$$\text{ويكون } \frac{\text{م} (\text{ر} - \text{ر}^{١+\text{د}})}{(١ - \text{ر})} = \text{ح}$$

$$\text{أو } \frac{\text{م} (\text{ر}^{١+\text{د}} - \text{ر})}{١ - \text{ر}} = \text{ح} \dots \dots \dots (١٠)$$

وهذا القانون يمكن الحساب على موجه اذا اعتبر أن الدفعة السنوية تدفع أول كل سنة

تطبيق - شخص يضع فى أول كل سنة ١٠ جنيهات فى بنك توفير بسعر ٢,٥٪/ لمدة ١٥ سنة فما مقدار ما يستحقه فى نهاية هذه المدة

لذلك نضع في قانون (١٠) بدل الحروف مقاديرها

$$\frac{(1 - \frac{10}{10000}) 10000 \times 10}{0.0001} = \text{فوجد}$$

ثم نبحث عن مقدار  $10,000$  فوجد أنه عبارة عن  $1,448$  وحينئذ

$$\frac{0.0001 \times 10000 \times 10}{0.0001} = \text{يكون}$$

$$\text{أو } 183,680 = \text{جنيها}$$

ملاحظة - اذا قورن بين هذا المقدار والمقدار الناتج في مسألة  
نمرة ٣٣٦ نجد أن بينهما فرقا مقداره  $4,480$  جنيهاً وهذا الفرق هو  
الربح المركب لمبلغ  $10$  جنيته في  $10$  سنة

لانه بمقارنة القانونين  $1067$  والرمز للمعلمتين بحرفي  $\text{ح } 6$

$$\frac{(1 - \frac{10}{10000}) 10000 - (1 - \frac{10}{10000}) 10}{1 - \frac{10}{10000}} = \text{نجد}$$

$$\text{أو } \frac{(1 - \frac{10}{10000}) (1 - \frac{10}{10000}) 10}{1 - \frac{10}{10000}} = \text{أو}$$

$$\text{أو } (1 - \frac{10}{10000}) 10 = \text{أو}$$

وهذا هو مقدار الربح المركب للمبلغ  $10$  في  $10$  سنين

٣٣٩ " تنبيه من قانون (١٠) السابق يمكن استخراج كل من

$\text{ح } 6$  متى علمت باقي الكميات بطريقة مشابهة لما تقدم بنمرة ٣٣٧

$$\frac{(1-r)^2}{(1-\frac{2}{r})r} = m \text{ فيوجد أن } m$$

$$\text{وان } \frac{m}{r} = \frac{m}{r} [r^2 + (1-r)^2] - m$$

وعلى الطالب أن يمتن بنفسه على كيفية استخراج هذين القانونين  
٣٤٠ تقدم بكرة ٣٢٠ أن القيمة الحالية لدفعة سنوية مستديمة  
تتبع بالقانون (٣) وهو  $m = \frac{r}{1-r}$  وهذا القانون يمكن أن يكتب  
هكذا  $m = \frac{r}{1-r}$  يجعل ب رمز الربح الوحدة

ومن الواضح أنه إذا قسمت القيمة الحالية  $m$  على الدفعة السنوية  
المستديمة  $r$  يدل الخارج على عدد السنين التي يمكن فيها الحصول على  
أرباح تعادل القيمة الحالية وعدد هذه السنين يسمى عدد سنين الشراء  
فاذا رمز لعدد سنى الشراء بحرف  $h$  يكون  $h = \frac{m}{r}$  ويقال  
ان الدفعة من ذات  $h$  سنين شراء

ويؤخذ من هذا أن  $m = h \cdot r$  فاذا وضع هذا المقدار بدلا عن  
 $m$  في قانون (٣) السابق الاشارة اليه نجد

$$h = \frac{r}{1-r} \text{ أو } h = \frac{1}{1-\frac{r}{m}}$$

أعني ان عدد سنى الشراء لدفعة سنوية مستديمة يساوى خارج  
قسمة مائة على سعرها ومن القانون  $h = \frac{1}{1-\frac{r}{m}}$  يؤخذ أن  $e = \frac{1}{h}$   
أعني أن سعر الربح يساوى خارج قسمة مائة على عدد سنى الشراء  
وأعظم ثقة في السندات المالية المستديمة يستدل عليها بعدد سنى  
الشراء أى بقسمة ثمن الشراء على سعر الربح السنوى

فسندات ٢٥٪ التي تشتري بسعر  $\frac{1}{4}$  ٩٠ هي بقيمة ٣٧ سنة  
 وسندات ٤٪ « « « ٩٦ « « ٢٤ «  
 وسندات ٥٪ « « « ٨٠ « « ١٦ «

٣٤١ ريع أراضي الزراعة - الابعادية الحرة هي الاراضى الزراعية التى ينتج منها ريع سنوى

ويمكن اعتبار ريع الابعادية الحرة أنه دفعة سنوية مستديمة لثمن شرائها وبناء على ما تقدم فى الفقرة السابقة يكون عدد سنى الشراىساوى خارج قسمة الثمن على مقدار الريع ويؤخذ من هذا أن مقدار الريع يساوى خارج قسمة الثمن على عدد سنى الشراء ويعلم مما ذكر بالفترة السابقة أن سعر الريح يساوى خارج قسمة مائة على عدد سنى الشراء

(مثال ١) أرض ثمن القدان منها ٢٠٠ جنيه ويستغل من القدان ايراد قيمته ١٢٥٠ جنيها سنويا فما عدد سنى الشراء

$$\text{عدد سنى الشراء} = \frac{200}{1250} = 16 \text{ سنة}$$

(مثال ٢) أرض ثمن القدان منها ١٩٥ جنيها شريت على حساب ٢٠ سنة فبكم يؤجر القدان منها

$$\text{ايجار القدان} = \frac{195}{20} = 9.75 \text{ جنيهات}$$

(مثال ٣) أرض يؤجر القدان منها بمبلغ ١٠ جنيهات فبكم يشتري القدان اذا فرض أن عدد سنى الشراء ١٨ سنة

ثمان الفدان  $10 \times 18 = 180$  جنيهها

(مثال ٤) أرض شريت بحساب الفدان ١٨٠ جنيهه ويؤجر بمبلغ

١٠ جنيهات فمأسعر الربح

اولا  $\frac{180}{18} = 10$  عدد سننى الشراء

ثانيا  $\frac{10}{9} = \frac{100}{90}$  ٥ جنيهات سحر الربح

ويمكن الحصول على سحر الربح مباشرة باعتبار ١٠ جنيهات ربعا

لمبلغ ١٨٠ جنيهه ومنه يستخرج السحر فيوجد أنه  $\frac{10}{9}$  ٥ جنيهات

٣٤٣ العقارات وإيجارها - يمكن اعتبار أن الأجرة السنوية

لعقار هي دفعة سنوية مستديمة لثمان

ومن المعتاد أن يعتبر عدد سننى الشراء من ١٢ الى ١٥ سنة فى

الهارات المستجدة الانشاء ومن ٨ الى ١٠ فى متوسطة الانشاء ويتنوع

عدد سننى الشراء بحسب جودة المباني وما استعمل فيها من المواد

ولا حاجة لايارد أمثلة على العقارات اكتفاء بما ذكر فى أراضى

الزراعة

٣٤٣ تنبيه - يلاحظ استبعاد قيمة الضرائب (الخراج

والعشور) فى مسائل أراضى الزراعة واستبعاد قيمة الجكر على العقار

وما يلزم له من نفقة الاصلاح لاستمرار بقائه من الايراد السنوى

تمرين ٧٢

(١) ما مقدار مجموع الدفع السنوية التى كل منها ٥٠ جنيها لمدة ١٥ سنة باعتبار

الربح المركب بسمر ٤٪/ بفرض أن لو  $1703 = 1704$  ولو  $180075 =$

$525535 =$

- (٢) ما مقدار القيمة الحالية لدفعة سنوية مقدارها ٢٠ جنبها لمدة ٦ سنين بسعره ٥٪ مع العلم بأن لو ١٠٥ = ١٠٢١١٨٩٣ و لو ٧٤٦٢١٥ = ٨٧٢٨٦٤٢
- (٣) أوجد القيمة الحالية لدفعة سنوية مقدارها ٣٠٠ جنبه تستمر الدفع لمدة ٢٠ سنة بسعر ٥٪ بالربح المركب مع العلم بأن لو ١٠٥ = ١٠١٩١٢ و لو ٤١٤٥٧ = ٤٦١٧٦
- (٤) ما مقدار المبلغ المقترض بسعر ٥٪ وسدد في ١٦ سنة بدفع سنوية قيمة الواحدة منها ١٧٧٩٩ جنبها
- (٥) ما الذي يلزم وضعه للحصول على دفعة سنوية مقدارها ٢٥٠ جنبه تستمر الدفع لمدة ٩ سنين باعتبار الربح ٤٪
- (٦) شخص يقبل أن يكسب ٣٪ على رأس ماله فما المبلغ الذي يدفعه في شراء سند بمبلغ ١٠٠ جنبه يربح ٤٪ لمدة ١٠ سنين ثم ترد له قيمة الاسمية في نهاية تلك المدة
- (٧) أجر شخص من شركة بناء منزلا بمبلغ ٦٠ جنبها سنويا بشرط أن تتنازل له عنه بعد مضي ٢٠ سنة فإذا كانت هذه الشركة تحسب ٥٪ أيرادا لرؤس أموال المساهمين و  $\frac{1}{100}$  لادارة العمل فما يكون أجرة المنزل سنويا إذا كان يبقى ملكا للشركة
- (٨) رجل عمره ٥٤ سنة يأخذ معاش التقاعد وقدره ٢٠٠ جنبه أراد أن يستبدل نصفه بمكافأة فما المبلغ الذي ينبغي أن يأخذه إذا كانت الارباح ٥٪ والزمين الذي يأمل أن يبقاه على قيد الحياة ١٧ سنة
- (٩) شخص باع منزلا وقيل أن يأخذ نصف الثمن ويؤجل الباقي على ثلاث سنوات بحيث تحسب له الارباح المركبة بسعر ٥٪ وبذلك كان مقدار الدفعة السنوية التي يأخذها ٥٨١٢ جنبه فما مقدار الثمن الحالي للبيت المذكور
- (١٠) ما مقدار القيمة الحالية لدفعة سنوية مستديمة مقدارها ١٠٠ جنبه بسعر ٤٪
- (١١) شخص أراد أن يشتري لاولاده أطعما بحيث يحصلون منها على أيراد سنوي قدره ٥٠٠ جنبه فإذا كان أيراد الاطيان هو باعتبار ٦٪ فما مقدار المبلغ الذي يشتري به ذلك واعدد سفي الشراء

(١٢) ما مقدار الدفعة السنوية التي يستهلك بها ٣٠٠٠٠ جنيه مقترضا بسعر ٥٪ في مدة ١٠ سنين

(١٣) اقترض شخص مبلغ ٢٠٠٠ جنيه بسعر ٥٪ بالربح المركب ويراد تسديده في ٢٠ سنة بدفع سنوية متساوية تدفع كل ستة مرة فما مقدار كل دفعة منها

(١٤) شركة زراعية اشترت ٦٠٠٠ فدان ثمن الفدان ٦٥ جنيا وقامت بدفع ثلث الثمن وتمهدت بتسديد الباقي في ١٥ سنة وتحسب أرباحه المركبة بسعر ٦٪ فما مقدار ما يلزم أن تدفعه هذه الشركة سنويا

(١٥) شركة اقترضت ٢٠٠٠٠ جنيه بسعر ٣٪ ويسدد في ١٠ سنين ما مقدار ما يلزم أن تسدده الشركة في كل ستة

مع العلم بأن لو ١٠٣ = ٢٠١٢٨٣٧٣ ولو ٧٤٤٠٩٤ = ٨٧١٦٢٧٩

(١٦) مزارع أراد أن يشتري ٣٦ فدان بسعر الفدان ٧٥ جنيا ولكنه لا يملك غير ٩٠٠ جنيه نفى كم ستة يمكنه أن يسدد باقي الثمن اذا حسب عليه بالارباح المركبة بسعر ٥٪ وكان يدفع ما تفرجه هذه الاطيان على حساب ٥ جنيات للفدان في السنة وأن يضم الى ذلك ٣٣ و ١٠٠ جنيا في كل ستة

(١٧) ما عدد الدفع التي يستهلك بها مبلغ ١٥٠٠٠ فرنك مقترضا بسعر ٦٪ اذا كان مقدار الدفعة السنوية ٢٠٣٧ و ٨ فرنكا

(١٨) رجل له رأس مال قدره ٣٠٠٠ جنيه ويحتاج الى مصروف سنوي قدره ٢٧٠ جنيا فاذا كان رأس ماله يربح بسعر ٥٪ في السنة فكيف ستة يكفيه هذا المبلغ مع أرباحه (١٩) رجل عنده مبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه ويحتاج أن يصرف ٧٠٠٠ جنيه في السنة أشار عليه أحد الماليين بأن يضعه في مصرف ليربح بسعر ٣٪ وبذلك يمكنه أن يكفيه مدة أكثر مما كان يصرفه فيها فما مقدار هذه المدة

مع العلم بأن لو ٢ = ٣٠١٠٣ ولو ٣ = ٧٧١٢ ولو ٢٣ = ٣٦١٧٣

(٢٠) أبادية أرادها السنوي ٢٨٠ جنيا اشترت بمبلغ ٧٠٠ جنيه وأوجد سعر ربحية

(٢١) دفعة سنوية مستندة قيمتها ٤٠ ستة شراء أوجد جملة دفعة سنوية مقدارها

٣٠٠٠ جنيه لمدة ١٠ سنين بالسعر عيته



بفرض أن لو ١٠٢٥ و ١٠٧٢ و ١٠٧٢ = ١٢٨٠ و ١٠٧٢ = ٣١٠٧٢

(٢٢) \* شخص يريد أن يشتري دفعة سنوية مقدارها ٥٠ جنيا يتبدى بعد ٤٠ وتستمر ٢٠ سنة فكم جنيا يلزم أن يدفعها لذلك إذا اعتبر السعر ٣٠٥٪

(٢٣) \* زيد يقصد من إرادته في كل سنة ٣٠٠ جنيه ويضعها في انتهاء السنة في بنك لتربح ربها مركبا بسعر ٥٪ فما مقدار ما اقتصدته وأرباحه في مدة ٢٠ سنة

(٢٤) \* رجل يوفر  $\frac{1}{3}$  ٣ جنيات من إرادته الشهري ويضع ما يوفره في آخر كل سنة في بنك ليربح بسعر ٤٪ فما جملة ما يوفره في مدة ٣٠ سنة

(٢٥) \* شخص حينما كان عمره ٨ سنين عزم على أن يصبغ له مبلغ في كل سنة ويضعه في بنك بالارباح المركبة بسعر ٣٠٥٪ حتى إذا بلغ ولده سن ١٩ يتكون له من هذه المبالغ وأرباحها مبلغ ٢٠ جنيا فما مقدار ما يلزم أن يضعه في البنك في انتهاء كل سنة

(٢٦) \* رجل يوفر ٢٠٠ جنيه من إرادته في السنة ويضع ذلك في بنك بالربح المركب بسعر ٣٠٥٪ فبعد كم سنة يصير عنده رأس مال يربحه مساويا لتوفيره السنوي

(٢٧) \* شخص عمره ٣٠ سنة آمن على حياته بمبلغ ١٠٠٠ جنيه تدفع له عند بلوغه سن ٥٥ سنة أو تدفع لورثته عند وفاته فإذا كان ما يدفعه في أول كل سنة ٤٢ جنيه انجليزي و ١٢ شان ٦ بنس وفرض أنه استمر على الدفع الى هذا السن فما مقدار مكسب شركة التأمين عند انتهاء المدة إذا اعتبرت الارباح بسعر ٤٪ في السنة

(٢٨) \* دارم شخص على وضع مبلغ ٧٢ جنيا في بنك في أول كل سنة ليربح ربها مركبا بسعر ٥٪ فبعد كم سنة يتيج له من مبالغه وأرباحها ١١٦٥ و ٢٦ جنيا

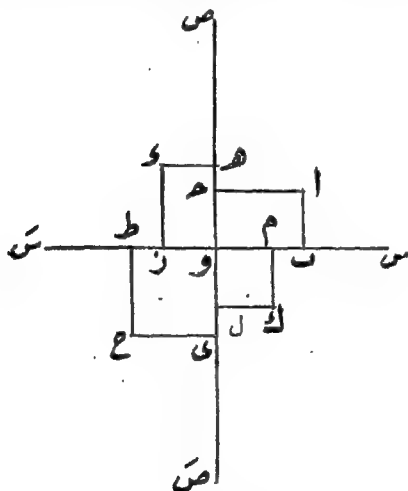
(٢٩) \* شخص كان يضع في أول كل سنة مبلغ ٢٠٠ فرنك في بنك ليربح ربها مركبا بسعر ٥٪ وبعد مدة استلم مبلغ ٨٠ و ٤٥٣١ فرنكا فما مقدار المدة التي كانت فيها المبالغ في البنك

(٣٠) \* ما مقدار المبلغ الذي يوضع في ابتداء كل سنة مدة ١٢ سنة ليربح ربها مركبا بسعر ٥٪ حتى يتيج من هذه المبالغ وأرباحها ١٠٠٠ جنيه مصر يا تماما

## الرسـم الـيـانـي

٣٤٣ اذا رسم خطان مستقيمان  $س$  و  $ص$   $٦$  ص و  $٦$  ص  
أحدهما أفقي والآخر رأسي ومتقاطعان على التعمد في نقطة و ينقسم  
مستويهما الى أربعة أقسام

$س$  و  $ص$   $٦$   $س$  و  $ص$   $٦$   $ص$  و  $٦$   $س$  و  $٦$   $ص$  و  $٦$   $س$   
شكل (١) تسمى على التوالي بالربع الأول والثاني والثالث والرابع.



شكل (١)

والخطان المذكوران يسميان محوري الاحداثيات أو خطي المقارنة  
ويسمى الأفقي محور السينات والرأسي محور الصادات ونقطة  
تقاطعهما تسمى نقطة أصل الاحداثيات

٣٤٤ تعين وضع نقطة - كل نقطة في المستوى السابق تكون  
معينة الوضع اذا علم بعدها عن المحورين الاحداثيين  $س هـ$   $س هـ$   
٦ ص ص

مثلا في شكل (١) النقطة أ تكون معينة الوضع اذا علم بعدها عن  
المحور الأفقي  $س هـ$  وهو أ ب وبعدها عن المحور الرأسي  $س هـ$   $س هـ$   
وهو أ ح

ومن حيث ان البعد أ ب = ح و وهو جزء من الرأسي  $س هـ$   $س هـ$   
يقال له الاحداثي الرأسي

ومن حيث ان البعد أ ح = ب و وهو جزء من الأفقي  $س هـ$   $س هـ$   
يقال له الاحداثي الأفقي

وحيث اذا علم الاحداثيان ح و ب وأقيم من ب ح عمودان  
على المحورين يتعين بتقاطعهما وضع نقطة أ

وبمثل ذلك يتعين وضع النقطة د بمقدمة الاحداثيين  $س هـ$   $س هـ$  وهـ  
واقامة عمودين من  $س هـ$   $س هـ$  على المحورين فتكون هي نقطة تقاطعهما  
وكذا يتعين وضع النقطة ح بمعرفة الاحداثيين ط و  $س هـ$   $س هـ$   
ووضع النقطة ك بمعرفة الاحداثيين م و  $س هـ$   $س هـ$

٣٤٥ اذا فرض أن المحورين  $s$  و  $s'$   $6$  ص  $6$  ص  $6$  ص منقسمان  
بوحدة طولية واحدة ومبدأ التقسيم من و أمكن أن تقدر الابعاد  
السابقة بمقادير عددية تؤخذ من أقسام المحورين بالابتداء من  
نقطة و

وقد اتفق على أن الابعاد التي تؤخذ على المحور الأفقي على يمين  
نقطة و أى فى الاتجاه و  $s$  تكون موجبة والابعاد التي تؤخذ عليه  
على يسار نقطة و أى فى الاتجاه و  $s'$  تكون سالبة وأن الابعاد التي  
تؤخذ على المحور الرأسى فى الاتجاه الأعلى و  $s$  تكون موجبة والتي  
تؤخذ عليه فى الاتجاه الأسفل تكون سالبة .

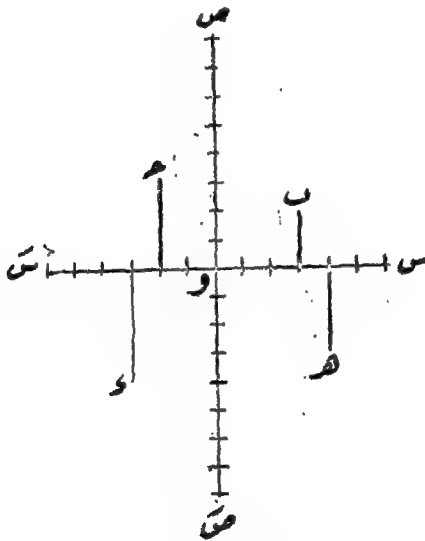
٣٤٦ تنبيه - يكفى فى تعيين نقطة أن يؤخذ الاحداثى الأفقى  
على المحور الأفقى ثم يقام من نهايته عمود وتؤخذ عليه بعد مساوى  
الاحداثى الرأسى فتكون نهاية هذا البعد هى النقطة المطلوبة

(مثال ١) المطلوب تعيين النقطة التى احداثياها ٣ و ٢

لذلك يرسم محوران  $s$  و  $s'$   $6$  ص  $6$  ص  $6$  ص (شكل ٢) متقاطعان على  
التعامد فى و ثم يؤخذ على و  $s$  بعد مساوى ٣ وحدات طولية ويقام  
عمود من نهاية البعد الثالث فى الاتجاه الرأسى الموجب ويؤخذ عليه  
وحدتان فنهايتهما ب هى النقطة المطلوبة

(مثال ٢) المطلوب تعيين النقطة التى احداثياها ٣ و ٢

يؤخذ على محور السينات في الاتجاه  $z$  السالب بعد  
يساوى وحدتين ومن نهايته يقام عمود في الاتجاه الرأسى الموجب  
ويؤخذ عليه بعد ٣ وحدات فنهاية هذا البعد وهي  $c$  هي النقطة  
المطلوبة



( شكل ٢ )

( مثال ٣ ) المطلوب تعيين النقطة التي احداثياتها  $3 - 6 - 4$  :

لذلك يؤخذ على محور السينات في الاتجاه و سـ الأفقي السالب  
بعد يساوى ٣ وحدات ومن نهايته يقام عمود في الاتجاه الرأسى السالب  
ويؤخذ عليه بعد ٤ وحدات فنهاية هذا البعد وهى د هى النقطة  
المطلوبة

( مثال ٤ ) المطلوب تعيين النقطة التى احداثياها ٤ - ٦ - ٣

لذلك يؤخذ على محور السينات في الاتجاه و سـ الأفقي الموجب  
بعد ٤ وحدات ومن نهايته يقام عمود في الاتجاه الرأسى السالب  
ويؤخذ عليه ٣ وحدات فنهاية هذا البعد وهى ه تكون هى النقطة  
المطلوبة

### ٣٤٧ ملاحظات

(١) احداثيا نقطة الأساس هما (٠,٠)

(٢) الاحداثى السينى لأى نقطة موجودة على المحور الصادى  
هو صفر

(٣) الاحداثى الصادى لأى نقطة موجودة على المحور السينى  
هو صفر

(٤) بعد أى نقطة مثل ع احداثياها سـ ٦ صـ عن الأساس  
يبين بالمطابقة و  $ع = س + ص$

٣٤٨ يستحسن في الرسم البيانى استعمال ورق مقسم الى مربعات  
صغيرة متساوية وينتخب خطان متعامدان أحدهما أفقى والآخر رأسى  
يحملان محورى الاحداثيات وينبغى تمييزهما بأن يعلم عليهما بنحو قلم

رصاص واتخاذ نقطة تقاطعهما مبدأ للاحداثيات ويتخذ كل جزء  
أوجزئين أو أكثر من أقسام المحورين وحدة للقياس وبواسطة ذلك  
يمكن بيان وضع أى نقطة متى علم مقدارا احداثيها

وبالعكس اذا أخذت أى نقطة فى أى ربع أمكن معرفة مقدارى  
احداثيها بواسطة أقسام الورق

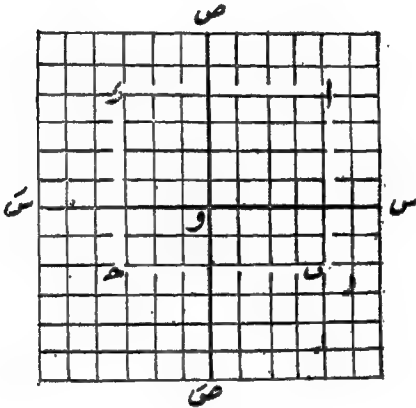
ويمكن معرفة وضع خط اذا علمت أوضاع نقط كثيرة منه متقاربة  
وجمعت بنقط واحد

ويمكن معرفة وضع مستقيم معلود اذا علم وضع نقطتي نهايتيه  
وكذا يمكن معرفة وضع شكل مستقيم الاضلاع ومساحته اذا علمت  
نقط رؤسه

(مثال ١) المطلوب تعيين النقط (٤ و ٤) ٦ ( - ٣ و ٤ )  
٦ ( - ٣ و ٦ ) ٢ ٦ ( ٤ و ٦ - ٢ ) على ورق مقسم مربعات  
وايجاد مساحة الشكل المستقيم الاضلاع الحادث من الوصل بين  
هذه النقط

يرسم المستقيمان  $s-s$  و  $6-6$  صرّ متقاطعان على التعامد  
فى ورق مقسم مربعات ثم تعين النقطة (٤ و ٤) بأن يؤخذ على المحور  
 $s-s$  أربعة أقسام جهة اليمين وعلى العمود المقام من نهاية القسم  
الرابع تؤخذ ٤ أقسام الى جهة أعلى فتعین النقطة  $a$  ثم تعين النقطة  
( - ٣ و ٤ ) بأن يؤخذ على المحور  $s-s$  بعد يساوى ثلاثة أقسام

في الاتجاه السالب وسمّ وعلى العمود المقام من نهاية هذا البعد  
في الاتجاه الأعلى الموجب يؤخذ أربعة أقسام فتتعين نقطة و



(شكل ٣)

وبمثل ذلك تتعين النقطتان (٢-، ٣-) و (٢-، ٤-) وليكونا ح  
ب فاذا وصل بين النقط أ ب ح ب ح ب ح ب ح ب بمستقيبات كان الشكل  
أ ب ح د هو الشكل المطلوب ومساحته هي  $٦ \times ٧ = ٤٢$   
وحدة مربعة فاذا كانت هذه الوحدة هي نصف السنتيمتر كانت  
هذه المساحة ٤٢ من نصف السنتيمتر المربع أي ٠.٠١٠٥ من  
المتر المربع



تمرين ٧٣

بين أوضاع كل تقطين مما يأتي على التوالي وصل بينهما بمستقيم

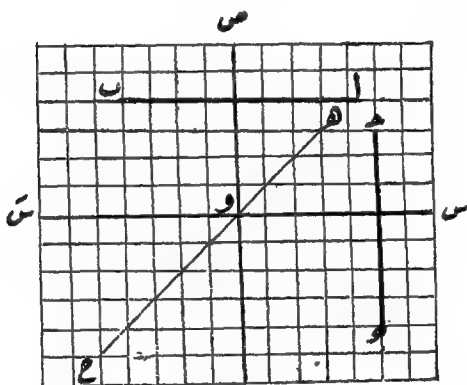
|                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| (١) (٣ و ٢) ٦ (٣ و ٧) | (٨) (٢ و ٥) ٦ (٢ و ٣)  |
| (٢) (٣ و ٢) ٦ (٤ و ٦) | (٩) (٤ و ٣) ٦ (٣ و ٤)  |
| (٣) (٥ و ٥) ٦ (٤ و ٣) | (١٠) (٣ و ٠) ٦ (٣ و ٥) |
| (٤) (٤ و ٣) ٦ (٤ و ٣) | (١١) (٦ و ٠) ٦ (٠ و ٣) |
| (٥) (٦ و ٠) ٦ (٥ و ٦) | (١٢) (٨ و ٠) ٦ (٠ و ٢) |
| (٦) (٥ و ٤) ٦ (٧ و ٣) | (١٣) (٨ و ٣) ٦ (٦ و ٢) |
| (٧) (٨ و ٥) ٦ (٢ و ٣) | (١٤) (٢ و ٢) ٦ (٥ و ٥) |

بين على الورق النقط الموضح احداثياتها في كل مما يأتي وصل بينها بخطوط مستقيمة واذكر اسم كل شكل منها وبين مساحته

- (١٥) (٣ و ٣) ٦ (٣ و ٣) ٦ (٣ و ٣) ٦ (٣ و ٣)  
 (١٦) (٠ و ٤) ٦ (٤ و ٠) ٦ (٠ و ٤) ٦ (٤ و ٠)  
 (١٧) (٠ و ٠) ٦ (١٠ و ٠) ٦ (٥ و ٥)  
 (١٨) (٣ و ٢) ٦ (٣ و ٨) ٦ (٧ و ٤) ٦ (٧ و ١٠)  
 (١٩) بين أن المثلث الذي رؤسه (٠ و ٠) ٦ (٦ و ٠) ٦ (٣ و ٤)

يكافئ المثلث الذي رؤسه (٠ و ٠) ٦ (٦ و ٠) ٦ (٨ و ٤)  
 وبين مساحة كل منهما

(مثال ۱) المطلوب تعيين النقط (۰.۵) و (۳.۵) و (۱-۵) و (۴-۵)



(شکل ۲)

بتعيين هذه النقط كما سبق توجد أنها على المستقيم  $\Delta$  الموازي  
للأحور الرأسى (شكل ٣)

(مثال ٢) المطلوب تعيين النقط (٤ و ٤) ٦ (٤ و ٠) ٦  
٦ (١ و ٤) ٦ (٤ و ٤) ٦

بتعيين هذه النقط كما سبق توجد أنها على المستقيم ا ب الموازي  
للحور الأفقي (شكل ٣)

(مثال ٣) المطلوب تعيين النقط (٢ و ٢) ٦ (٣ و ٣) ٦  
٦ (٢ و ٢) ٦ (٣ و ٣) ٦ (٥ و ٥) ٦

بتعين النقط المذكورة كما سبق توجد أنها على الخط ه و ع المار  
بالأساس والمنصف للزاوية الواقعة بين محوري الاحداثيات (شكل ٣)  
يؤخذ من الأمثلة السابقة

أولاً - أن النقط المتحدة في مقادير احداثياتها الأفقية توجد  
على مستقيم مواز للحور الرأسى

ثانياً - أن النقط المتحدة في مقادير احداثياتها الرأسية توجد على  
مستقيم مواز للحور الأفقى

ثالثاً - أن كل نقطة تساوى احداثياها الأفقى والرأسى توجد على  
المستقيم المنصف للزاوية التى بين المحورين

وكذا يؤخذ من تلك الأمثلة عكس كل ما ذكر أعنى أن كل مستقيم  
مواز للحور الرأسى تكون جميع نقطه متحدة في احداثياتها الأفقية وأن  
كل مستقيم مواز للحور الأفقى تكون جميع نقطه متحدة في احداثياتها  
الرأسية وأن كل مستقيم منصف للزاوية التى بين المحورين تكون  
كل نقطة من نقطه متساوية الاحداثيين

## تمهيد ٧٤

المطلوب أن تذكر أوضاع كل من الخطوط المبينة بالنقط الآتية  
بالنسبة لمحورى الاحداثيات وتحقيق ذلك برسمها رسماً بيانياً

- (١)  $(٢ و ٣) 6 (٣ و ٣) 6 (٤ و ٣) 6 (٧ و ٣) 6 (١٠ و ٣)$
- (٢)  $(٢ و ٤) 6 (٥ و ٢) 6 (٦ و ٢) 6 (٩ و ٢)$
- (٣)  $(٢ و ٢) 6 (٣ و ٣) 6 (٥ و ٥) 6 (٧ و ٧)$
- (٤)  $(٠ و ٤) 6 (٤ و ٤) 6 (٦ و ٤) 6 (٤ و ٤)$
- (٥)  $(٥ و ٠) 6 (٤ و ٥) 6 (٣ و ٥) 6 (٦ و ٥)$
- (٦)  $(٠ و ٠) 6 (١ و ١) 6 (٥ و ٥) 6 (٧ و ٧)$
- (٧)  $(٢ و ٤) 6 (٤ و ٤) 6 (٤ و ٦) 6 (٤ و ٨)$
- (٨)  $(٢ و ٣) 6 (٣ و ٣) 6 (٣ و ٤) 6 (٣ و ٥)$
- (٩)  $(٣ و ٢) 6 (٥ و ٢) 6 (٧ و ٢) 6 (٩ و ٢)$
- (١٠)  $(٠ و ٠) 6 (٣ و ٣) 6 (٣ و ٣) 6 (٥ و ٥) 6 (٥ و ٥)$

## الدوال

٣٥٠ كل كمية لا تشتمل الا على مقدار واحد عام فان قيمتها

ترتبط بهذا المقدار

فالكمية ٥ سه — ٧ تتعلق قيمتها بمقدار سه فاذا كان سه = ٢

آلت الى — ٣ واذا كان سه = ٥ آلت الكمية الى ٨

ويقال لهذه الكمية إنها دالة  $s$  وعلى هذا فالكميات

$$s - ٧ \text{ كـ } s^2 - ٣s + ١٥ \text{ كـ } ٦s^2 + s^3 + s^4 - ٨$$

هي دوال لكمية  $s$  ودرجاتها على التوالي الاولى والثانية والرابعة  
وتبين أى دالة بالوضع  $s$  (س) غالبا

وإذا كان  $s$  (س) =  $s$  فمن الواضح أنه إذا أعطى مقادير  
مختلفة لكمية  $s$  ينتج لكمية  $s$  مقادير مقابلة لها فالمقادير التي تعطى  
الى  $s$  تسمى بالمقادير المطلقة ومقادير  $s$  التي ينتج من الفروض  
المختلفة تسمى بالمقادير المطابقة لها

فإذا أخذت الدالة  $s - ٦$  =  $s$  وأعطى الى  $s$  مقادير  
مختلفة مثل ١٠، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ ينتج لكمية  $s$  مقادير مطابقة لها

فإذا فرض أن  $s = ٠$  يكون  $s = - ٦$

وإذا » » »  $s = ١$  »  $s = - ٤$

» » »  $s = ٢$  »  $s = - ٢$

» » »  $s = ٣$  »  $s = ٠$

» » »  $s = ٤$  »  $s = ٢$

» » »  $s = ٥$  »  $s = ٤$

» » »  $s = ٦$  »  $s = ٦$

» » »  $s = ٧$  »  $s = ٨$  وهكذا

فيشاهد أن قيمة الدالة ابتدأت بمقدار سالب ثم أخذت في الزيادة  
ومرت بالصفر وانتقلت الى مقادير موجبة متتالية

وبالاستمرار على هذا المنوال يمكن إيجاد عدد عظيم من مقادير هذه  
الدالة ولكن لا يهمننا غالبا مقادير الدالة الناشئة من تغيير القيمة المطلقة  
بقدر ما يهمننا كيفية تغييرها

### الرسم البياني للدالة

٣٥١ إذا فرضت كمية مثل ٣ س - ٢ فان المقدار الرقى  
لهذه الكمية يكون متعلقا بالمقدار الرقى للحرف س

فاذا فرض أن قيمتها هي ص - أى أن ٣ س - ٢ = ص  
أمكن أن يقال س (س) = ص

وإذا أعطى لقيمة س مقادير مختلفة على التوالى يوجد لقيمة ص  
مقادير مرتبطة بمقادير كمية س فاذا جعلنا كل مقدارين متطابقين  
أحداثنين أفقى ورأسى لنقطة أمكن أن نعين جملة نقطة اذا وصل  
بينهما بخط (مستقيم أو منحني) يسمى هذا الخط بالرسم البياني للدالة  
أى المتطابقة س (س) = ص

(مثال ١) أوجد الرسم البياني للمتطابقة س - ٢ = ص

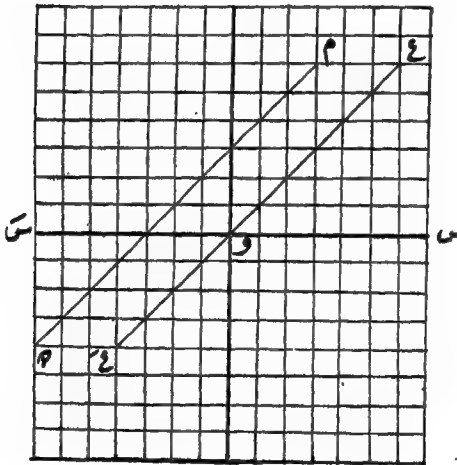
اذا جعل س = ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦  
أو - ٢ أو - ٣ الخ

يكون ص = ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦  
أو ٧ أو ٨ أو ٩

ثم نجعل كل مقدارين متطابقين احداثيين لنقطة ونعين هذه النقطة وهي

$$\begin{aligned} & (٠, ٠) \text{ و } (١, ١) \text{ و } (٢, ٢) \text{ و } (٣, ٣) \text{ و } (٤, ٤) \text{ و } (٥, ٥) \text{ و } (٦, ٦) \text{ و } (٧, ٧) \text{ و } (٨, ٨) \text{ و } (٩, ٩) \\ & (٢, -٢) \text{ و } (-٢, ٢) \end{aligned}$$

ص



(شكل ٥)

فيشاهد (كما في شكل هـ) أن الرسم البياني يمر بنقطة و ويبين عدة  
نقط كل منها متساوية الاحداثين أى أن يبين بالخط ع و ح

(مثال ٢) أوجد الرسم البياني للدالة  $س = ٣ + ح$   
لذلك ترتب مقادير  $س$  كما يأتى

|     |     |     |   |   |   |   |   |   |
|-----|-----|-----|---|---|---|---|---|---|
| ٣ - | ٢ - | ١ - | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | = | س |
| ٠   | ١   | ٢   | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | = | ح |

ثم نعين النقط (٣ و ٦) و (٢ و ٥) و (١ و ٤) فيوجد الخط م د

موازيا الى ح و ج

تنبيه - اذا قورن المثال الثانى بالاول يرى أن كل احدائى رأسى  
فى الثانى يزيد ثلاث وحدات عن نظيره فى الاول وبناء على هذا فالرسم  
البياني للمعادلة  $س = ٣ + ح$  يمكن ايجاده بواسطة الرسم البياني  
للمعادلة  $س = ح$  بمد كل احدائى رأسى ثلاث وحدات فى الجهة  
الايجابية أو السلبية

وبمثل ذلك تكون المعادلتان

$$س = ٥ + ح \quad س = ٥ - ح$$

دالتين على خطين متوازيين موجودين فى جهتي الخط الممين

بالمعادلة  $س = ح$  متساوي البعد عنه ويتيسر للطالب مشاهدة  
ذلك بانشاءهما

(مثال ٣) أوجد الرسم البياني للمعادلة  $س = ٢ - ح$

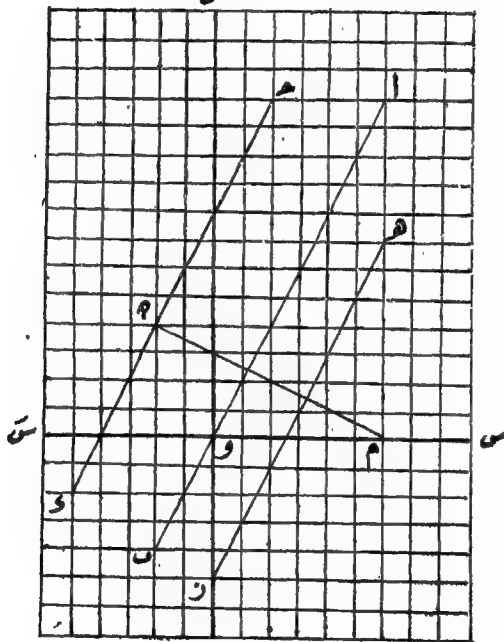
ترتب مقادير  $س$  كما يأتى



|    |    |   |   |   |   |   |    |    |   |    |
|----|----|---|---|---|---|---|----|----|---|----|
| ٢- | ١- | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥  | ٦  | = | سـ |
| ٤- | ٢- | ٠ | ٢ | ٤ | ٦ | ٨ | ١٠ | ١٢ | = | صـ |

وتعين النقط كما سبق فيوجد الخط ا ب المبين بشكل (٦)

صـ



صـ

(شكل ٦)



٣٥٢ يؤخذ مما تقدم أن كل معادلة ذات درجة أولى ومجهولين يمكن أن تبين بخط مستقيم ومن المهم ملاحظة أوضاع المستقيمات بنسبة بعضها لبعض وبالنسبة لمحوري الاحداثيات بالتأمل في المعادلات المفروضة ولتلفت نظر الطالب الى ذلك تقول بعد أن تحول صه في طرف بحيث يكون مكرره الواحد تؤول المعادلة الى احدى الصورتين الآتيتين صه = م سه أو صه = م سه + ح

وكل من الكيتين م و ح تكون موجبة أو سالبة صحيحة أو كسرية أو معدومة

فأولا - كل معادلة مثل صه = م. سه أى لا تشتمل الا على سه و صه تدل على خط مستقيم يمر بنقطة الاصل كما في المثالين (١) و (٣) من نمرة ٣٥٠

ثانيا - كل معادلة مثل صه = سه + ح أى تشتمل على سه و صه وعلى كمية أخرى مثل ح تدل على مستقيم لا يمر بنقطة الاصل ويقطع الاحداثى الصادى على بعد ح من نقطة الاصل كما في المثالين (٤) و (٥) من نمرة (٣٥١)

ثالثا - كل معادلتين مثل

$$\text{صه} = م سه \quad \text{و} \quad \text{صه} = م سه + ح$$

$$\text{أو مثل} \quad \text{صه} = م سه + ح \quad \text{و} \quad \text{صه} = م سه + ح'$$

أعنى أن مكرر سه من الاولى هو عين مكرر سه من الثانية يدلان على مستقيمين متوازيين كما يظهر من مقارنة الامثلة (٣) و (٤) و (٥) نمرة ٣٥١

رابعا - كل معادلتين مثل

$$\text{سه} = \text{م سه} + \text{ح ٦ سه} = - \frac{1}{\text{م}} \text{سه} + \text{ح}$$

أى فيهما مكررا سه مختلفان في العلامة ومتعاكسان (حاصل ضربهما - ١) يدلان على مستقيمين متعامدين كما يظهر من مقارنة المثال السادس بكل من الامثلة (٣) و (٤) و (٥)

تنبيه - اذا كان المستقيم منطبقا على أحد محورى الاحداث أو موازيا له فلا تكون معادلته محتوية الا على متغير واحد

فالمعادلة سه = ٠ هى معادلة محور سه والمعادلة سه = ٠ هى معادلة محور سه والمعادلة سه = ب هى معادلة مستقيم مواز للحدود الصادى وعلى بعد منه يساوى ب والمعادلة سه = أ هى معادلة مستقيم مواز للحدود سه وعلى بعد منه أ

تمرين ٧٤

فى كل من الأمثلة الآتية بين وضع الخط الذى تدل عليه كل معادلة وقارن بين الخطوط الدالة عليها الثلاث المعادلات وحقق ما ذكره برسم بيانى لكل ثلاث معادلات منها

$$(١) \text{سه} = \text{سه ٥ سه ٦ سه} = \text{سه ٥ سه ٦ سه} = \text{سه ٥ سه ٦ سه}$$

$$(٢) \text{سه} = \text{سه ٣ سه ٦ سه} = \text{سه ٣ سه ٦ سه} = \text{سه ٣ سه ٦ سه}$$



تربط بينها كيتان متغيريتان تدل على خط مستقيم كان كل كمية تأخذ  
الوضع أ سه + ب يقال لها دالة مستقيم بالنسبة للحرف سه والمعادلة  
التي مثل سه = أ سه + ب والتي مثل أ سه + ب سه  
+ = ٠ يقال لكل منها معادلة مستقيم

٣٥٤ إذا علم احداثيات عدة نقط من خط مستقيم أمكن  
تكوين معادله بالطريقة الآتية

ليكن المطلوب إيجاد معادلة المستقيم المعلوم منه النقط (٣ و -٤)  
و (٩ و ٤) و (١٢ و ١٨) فلذلك يقال

من المعلوم أن معادلة الخط تبين على وجه العموم بالوضع

$$\text{سه} = \text{أ سه} + \text{ب}$$

ومن حيث أن الخط المطلوب يمر بالنقطتين (٣ و -٤) و (٩ و ٤)  
فان مقدارى احداثي كل نقطة منهما يكونان حلا للمعادلة فاذا وضع  
على التوالى ٣ و -٤ ثم ٩ و ٤ بدلا عن سه ٦ سه في المعادلة  
العمومية للخط

$$\text{ب} + ١٣ = ٤ - \quad \text{ينتج}$$

$$\text{ب} + ١٩ = ٤$$

$$\text{وبحل هذه المجموعة نجد } ١ = \frac{٤}{٦} \text{ سه} = ٨ -$$

فاذا وضع هذان المقداران بدلا عن ٦ ب في المعادلة العمومية  
آلت الى ٤ سه - ٣ سه = ٢٤

فهذه معادلة الخط المار بالنقطتين الأولين وبما أن احداثيا النقطة الثالثة يصلحان أن يكونا حلا لهذه المعادلة اذ يجعل  $s = 12$   $6 = 8$  يتحقق تساوى الطرفين فالخط يمر بالنقطة الثالثة وحينئذ فالمعادلة  $4s - 3s = 24$  هي معادلة الخط المطلوبة

ويمكن ايضا ذلك برسم خط يمر بالنقطتين الأوليتين رسما بيانيا ثم بيان أن النقطة الثالثة توجد عليه

ومن هنا يؤخذ أنه يكفي لتحقيق أن جملة نقط على خط مستقيم أن نستخرج معادلة الخط باعتبار احداثيات أى نقطتين من تلك النقط كما سبق بيانه فان حتمت المعادلة التى تنتج احداثيات النقط الباقية دل ذلك على أن جميع النقط على خط مستقيم واحد

### حل مجموعة معادلتين آتيتين

٣٥٥ تقدم بكرة ١٢٥ أن كل معادلة ذات مجهولين يمكن تحقيقها بعدة مقادير لأنه اذا أعطى لأحد المجهولين مقدار اختيارى ينتج للمجهول الثانى مقدار مطابق له ولذا قلنا انها غير معينة الحل ويرى أن هذا ينطبق على معادلة المستقيم لانه يمكن إيجاد جملة نقط تتعين بواسطة معادلة مستقيم

وتقدم بكرة ١٢٨ أنه اذا كان المفروض معادلتين آتيتين بمجهولين فلا يوجد لكل منهما الا مقدار واحد تتحقق به المعادلتان فى آن واحد

وهنا نقول ان كل مستقيمين متقاطعين لها نقطة مشتركة واحدة  
يكون مقدارا احداثيا هذه النقطة حلا للجموعة ذات المعادلتين اللتين  
تدل كل منهما على خط مستقيم

(مثال ١) اذا أريد حل المعادلتين الآتيتين بطريق  
الرسم البياني

$$(١) \quad ٥س + ٣ص = ٢٩ \quad \dots \dots \dots (١)$$

$$(٢) \quad ٣س - ٢ص = ٦ \quad \dots \dots \dots (٢)$$

نعتبر أن كل معادلة منهما معادلة خط ونبحث عنه ولذا نفرض  
في معادلة (١)

|                   |     |                   |                  |   |                |                |   |                |   |   |       |
|-------------------|-----|-------------------|------------------|---|----------------|----------------|---|----------------|---|---|-------|
| ٣-                | ٢-  | ١-                | ٠                | ١ | ٢              | ٣              | ٤ | ٥              | = | س | أن    |
| $١٤\frac{٢}{٣}$ - | ١٣- | $١١\frac{١}{٣}$ - | $٩\frac{٢}{٣}$ - | ٨ | $٦\frac{١}{٣}$ | $٤\frac{٢}{٣}$ | ٣ | $١\frac{١}{٣}$ | = | ص | فيكون |

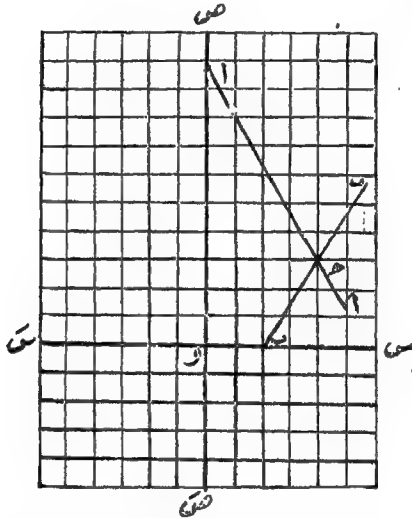
ونفرض في معادلة (٢)

|                  |    |                  |    |                  |   |                |   |                |   |   |       |
|------------------|----|------------------|----|------------------|---|----------------|---|----------------|---|---|-------|
| ٣-               | ٢- | ١-               | ٠  | ١                | ٢ | ٣              | ٤ | ٥              | = | س | أن    |
| $٧\frac{١}{٣}$ - | ٦- | $٤\frac{٢}{٣}$ - | ٣- | $١\frac{١}{٣}$ - | ٠ | $١\frac{٢}{٣}$ | ٣ | $٤\frac{١}{٣}$ | = | ص | فيكون |

فاذا بين ذلك بالدقة يرى أن هاتين المعادلتين يبينان الخطين ١  
٦ ب ب المرسومين في الشكل الآتي ويكون مقدارا احداثيا نقطة  
تقاطعهما وهي نقطة (٣ و ٤) حلا للجموعة



أى أن  $س = ٣$  و  $ص = ٤$



(شكل ٧)

وهذا يؤيد الحل السابق بيانه بنمرة ١٣٠ وما بعدها بمراعاة قاعدة ١٢٨

٣٥٦ ينتج مما تقدم أن طريقة حل معادلتين آيتين مجهولين من الدرجة الأولى هو عبارة عن إيجاد احد اثني النقطة التي يتقاطع فيها الخطان المبينان لرسم هاتين المعادلتين رسماً بيانياً

وبما أنه يكفي لتعيين مستقيم تعيين نقطتين من نقطه فيكفي في حل مجموعة معادلتين آتيتين من الدرجة الأولى بالرسم البياني إيجاد نقطتين من كل مستقيم ومن المستحسن أن تتخبط النقطتان الواقعتان على المحاور

مثلا لحل المجموعة ٣ س + ص = ٩ ... ... (١)

س + ص = ٦ ... ... (٢)

نعتبر أن كل معادلة منهما معادلة خط ونبحث عنه ولذا نفرض

في معادلة (١)

|   |   |   |   |   |   |   |   |       |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| ٥ | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | ٠ | = | س | أن    |
| ٦ | ٣ | ٠ | ٣ | ٦ | ٩ | = | ص | فيكون |

ونفرض في معادلة (٢)

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| ٦ | ٥ | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | ٠ | = | س | أن    |
| ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | = | ص | فيكون |

ومن حيث أن النقطتين (٩,٠) و (٠,٣) من المستقيم الأول توجدان على المحاور والنقطتان (٦,٠) و (٠,٦) من المستقيم الثاني توجدان على المحاور أيضا فيكفي تعيين هذه النقط الأربع وبواسطتها يتعين المستقيمان ونقطة تقاطعهما وهي  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{4}$  هي التي مقدارها احدائيهما يحلان المجموعة أي أن س =  $\frac{1}{4}$  و ص =  $\frac{1}{4}$

٣٥٧ مناقشة تقدم بكرة ١٤٢ أنه يشترط في امكان حل مجموعة ذات معادلتين أو معادلات أن لا يوجد بين معادلات المجموعة الواحدة تخالف في مقادير المجاهيل ولا أن يكون بعض المعادلات متداخلا في البعض

فأولا اذا أريد حل المجموعة سـ + ٣ صـ = ٢ ... (١)

٣ سـ + ٩ صـ = ٨ ... (٢)

يرى بدقة التأمل أن مقادير المجهولين فيهما ليست متحدة لأنه اذا قسم طرفا معادلة (٢) على ٣ ينتج سـ + ٣ صـ =  $\frac{8}{3}$  والطرف الأول من هذه المعادلة هو عين الطرف الأول من معادلة (١) وكان يجب أن يكون الطرف الثاني منها هو عين الطرف الثاني من الأولى (أى ٢) ولكنه هنا  $\frac{8}{3}$  أى  $\frac{2}{3}$

واذا حلت هاتان المعادلتان بطريق الرسم البياني يظهر خطان متوازيان أى لا يوجد لهما نقطة تقاطع فهذا دليل على تخالف مقدارى سـ و صـ

ثانيا - اذا أريد حل المجموعة

٤ سـ + ٣ صـ = ١ ... (١)

١٦ سـ + ١٢ صـ = ٤ ... (٢)

يرى أنهما متداخلتان لأن الثانية ناشئة من ضرب الأولى في ٤ فكأنهما معادلة واحدة ومعلوم أن معادلة واحدة غير كافية في تعيين مقدارى المجهولين اذ تكون لهما حلول غير معينة

وإذا حلت هذه المجموعة بواسطة الرسم البياني ينجح خطان منطبق أحدهما على الآخر وبذلك يكون بينهما نقط مشتركة غير محدودة العدد وبما أن كل نقطة مشتركة يدل احداثياها على مقدارى المجهولين فيكون لهما حلول غير معينة العدد

## تمارين ٧٥

المطلوب حل كل من المجموعات الآتية بطريقة الرسم البياني ثم تحقيق الناتج فى كل مجموعة بحلها بالطريقة العمومية نمرة ١٢٨ .

|                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| $٨ = ص - س \quad (٧)$           | $٨ = ص + س \quad (١)$          |
| $٦ = ص + س$                     | $٢ = ص - س$                    |
| $١٦ = ص + س \quad (٨)$          | $١٣ = ص + س \quad (٢)$         |
| $١٤ = ص - س \quad ٥$            | $٧ = ص - س$                    |
| $١٥ = ص - س \quad ٦ \quad (٩)$  | $١٧ = ص - س \quad ٣ \quad (٣)$ |
| $٤ = ص - س$                     | $١٢ = ص - س$                   |
| $٠ = ص + س \quad ٢ \quad (١٠)$  | $٣ + س = ص \quad (٤)$          |
| $ص = \frac{٤}{٣} (س + ٥)$       | $٦ = ص + س$                    |
| $٣ = ص - س \quad ٢ \quad (١١)$  | $٤ + س = ص \quad (٥)$          |
| $١٥ = ص - س \quad ٣$            | $٨ + س = ص$                    |
| $١٥ + س = ص \quad ٢ \quad (١٢)$ | $٠ = ص - س \quad ٤ \quad (٦)$  |
| $١٢ = ص - س \quad ٤$            | $١٨ = ص + س$                   |

## ملحقات

٣٥٨\* إذا اشتملت متساوية على كميات منطقة (جذرية) وكميات غير منطقة (جنور صماء) كانت أجزاء المنطقة في أحد الطرفين مساوية لأجزائها في الطرف الآخر وكذا أجزاء غير المنطقة

ففي المتساوية  $ح + و = ز + هـ$  إذا كان  $ح$   $هـ$  منطقيين و  $ز$  و  $و$  غير منطقيين كان  $ح = هـ$   $ز = و$  لأنه يتحول  $ح$  الى الطرف الثاني من المتساوية المفروضة ينتج

$$ح - و = ز - هـ$$

وإذا فرض أن  $ح - هـ = ز - و$  ورفع الطرفين للدرجة الثانية ينتج

$$ح^2 - و^2 = ز^2 - هـ^2$$

$$أو \quad ح^2 - ز^2 = و^2 - هـ^2$$

ومن حيث أن الطرف الأول هو كمية منطقة فلا يكون مساويا للكمية  $ح^2 - ز^2$  غير المنطقة إلا إذا كان  $ح = ز$

$$ومن حيث أن \quad ح - هـ = ز - و$$

$$فيكون \quad ح - هـ = ز - و \quad أي \quad ح = ز$$

وحيث يمكن أن يستنتج من المتساوية المفروضة أن  $ح = ز$

٣٥٩ كل مقدار بالصورة  $\overline{٢٧} + \overline{٢٧}$  يمكن تحويله الى  
مقدار مكافئ له بهذه الصورة  $\overline{٢٧} + \overline{٢٧}$  بحيث تكون الكميات  
 $١٦٦٦٦٦$  الداخلة في هذين المقدارين كلها منطقة

وللوصول الى ذلك ترفع الكمية  $\overline{٢٧} + \overline{٢٧}$  الى الدرجة الثانية

$$\text{فيخرج } (\overline{٢٧} + \overline{٢٧})^2 = ١ + ٢ + \overline{٢٧} + \overline{٢٧}$$

ثم نأخذ جذر الطرفين فيخرج  $\overline{٢٧} + \overline{٢٧} = \overline{٢٧} + \overline{٢٧} + ١ + ٢$

$$\text{فاذا فرض أن } ١ + ٢ = ١٦٦٦٦٦ = ١$$

يكون  $\overline{٢٧} + \overline{٢٧} = \overline{٢٧} + \overline{٢٧}$  وهو المطلوب

تنبيه - يؤخذ مما تقدم أن مقدار  $١٦٦٦٦٦$  هو مجموع المقدارين  $١٦٦٦٦٦$   
وأن مقدار  $١٦٦٦٦٦$  هو أربعة أمثال حاصل ضربهما وأما علامة  $\overline{٢٧}$   
فتكون موجبة اذا كانت علامتا الجذرين متحدة وتكون سالبة اذا  
كانت علامتهما متلفة .

(مثال ١) المطلوب تحويل  $\overline{٣٧} + \overline{٢٧}$  الى جذر واحد

يمكن أن نجري عملا مشابها لما تقدم ونحصل على المقدار المطلوب  
ويمكن استنتاج ذلك من القانون السابق

$$\text{فلاحظ أن } ١٦٦٦٦٦ = ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧ + ٣ = ١٦٦٦٦٦$$

$$\text{وحينئذ يكون } \overline{٣٧} + \overline{٢٧} = \overline{٣٧} + \overline{٢٧}$$

(مثال ٢) المطلوب تحويل  $\overline{٣٧} - \overline{٢٧}$  الى جذر واحد

نجعل في القانون السابق

$$٢٤ = ٢ \times ٣ \times ٤ = ٥٦ + ٣ = ٦$$

ومن حيث ان الجذرين المفروضين مختلفي العلامة فتكون علامة

$\sqrt{٢٤}$  سالبة

$$\sqrt{٢٤} - ٥ = \sqrt{٢٤} - ٣ \quad \text{ويكون}$$

٣٦٠ بالعكس يمكن تحويل المقدار  $\sqrt{٢٤} + ٥$  الى آخر

بهذه الصورة  $\sqrt{٢٤} + ٥$  بحيث تكون الكميات  $٥٦$  و  $٥٦$  جذرية

وللوصول الى ذلك يقال

$$\sqrt{٢٤} + ٥ = \sqrt{٢٤} + ٥$$

$$\sqrt{٢٤} + ٥ = \sqrt{٢٤} + ٥$$

وبمقتضى ما تقدم بمرة (٣٥٨)

$$\sqrt{٢٤} + ٥ = \sqrt{٢٤} + ٥$$

$$\sqrt{٢٤} + ٥ = \sqrt{٢٤} + ٥$$

فاذا ربح طرفا متساوية (١) وطرح من الناتج متساوية (٢)

$$\sqrt{٢٤} + ٥ = \sqrt{٢٤} + ٥$$

$$\sqrt{٢٤} + ٥ = \sqrt{٢٤} + ٥$$

$$\sqrt{٢٤} + ٥ = \sqrt{٢٤} + ٥$$

ثم نكتون مجموعة من متساويتي (١) و (٣)

$$\overline{s-2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = 1 \text{ وبحلها ينتج}$$

$$\overline{s-2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 6 \text{ ب}$$

ومن حيث ان ا 6 ب كيتان منطقتان فيلزم أن يكون  $\overline{s-2}$  مربعا كاملا فاذا رمز له بالرمز هـ

$$\text{يكون} \quad 1 = \frac{h+2}{r} \quad (٤) \dots \dots \dots$$

$$\text{ب} = \frac{h-2}{r} \quad (٥) \dots \dots \dots$$

أخى أنه يلزم لامكان تحويل المقدار  $\overline{s+2}$  الى جذرين منفردين أن يكون  $\overline{s-2}$  مربعا كاملا

تنبيه - قد فرض في المساوية  $\overline{s+2} = \overline{s-2} + 4 = \overline{s+2} + 4$  أن علامات الجذور الأربعة موجبة غير أنه قد تكون بعض هذه العلامات سالبة وللوصول الى معرفة علامتي ا 6 ب بالنسبة الى علامتي

المقدار  $\overline{s+2}$  يقال انه عند تربيع المساوية السابقة

$$\text{ينتج} \quad \overline{s+2} = 1 + 6 + 4 = \overline{s+2} + 4$$

وقد استنتج من هذه المساوية أن  $\overline{s+2} = \overline{s+2} + 4$  فاذن يلزم أن تكون علامتي  $\overline{s+2}$  و  $\overline{s+2} + 4$  متحدتين فاذا كانت علامة  $\overline{s+2}$  موجبة كانت علامة  $\overline{s+2} + 4$  موجبة أيضا وهذا دليل على أن  $\overline{s+2}$



٦  $\sqrt{b}$  مصحدا العلامة وإذا كانت علامة  $\sqrt{b}$  سالبة كانت علامة  $\sqrt{4a}$  سالبة وهذا دليل على أن  $\sqrt{b}$   $\sqrt{4a}$  مختلفا العلامة

(مثال ١) إذا أريد تحويل المقدار  $\sqrt{40} + \sqrt{7}$  إلى جذرين منفردين يقال إذا رمز للجذرين المطلوبين بالمقدارين  $\sqrt{a}$   $\sqrt{b}$  فبناء على القانونين ٤ و ٥ السابقين

$$\text{يكون } \frac{a+b}{4} = 1 \quad (4) \quad \frac{a-b}{4} = 6 \quad (5)$$

فأما  $a$  فهو هنا عبارة  $7$  وأما  $b$  فهو عبارة  $\sqrt{40} - \sqrt{7}$  أي

$$\sqrt{40} - \sqrt{7} = 9 \quad \text{وهو مربع كامل جذره } 3$$

$$\text{فيكون } 1 = \frac{3+7}{4} = 6 = \frac{3-7}{4} = 2$$

وحيث كانت علامة  $\sqrt{40}$  موجبة فتكون علامتا  $\sqrt{40}$   $\sqrt{7}$

$$\sqrt{40} + \sqrt{7} = \sqrt{40} + \sqrt{7} = \sqrt{40} + \sqrt{7}$$

(مثال ٢) إذا أريد تحويل المقدار  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  إلى جذرين منفردين

$$\text{فيلاحظ أن } \sqrt{3} = 6 = 8 \text{ وأن } \sqrt{2} \text{ أي } \sqrt{2} - \sqrt{3} =$$

$$1 = \sqrt{8-9}$$

$$\text{فاذن يكون } 1 = \frac{1+3}{4} = 2 = \frac{1-3}{4} = 1$$

ومن حيث أن علامة  $\sqrt{3}$   $\sqrt{2}$  سالبة فيعلم من ذلك أن علامتي  $\sqrt{3}$   $\sqrt{2}$  مختلفتان

$$١ - ٢٢ = ١٢ - ٣٢ = \overline{٢٢٢ - ٣٢} \text{ ويكون}$$

تمرين ٧٦

حول كل واحد من المقادير الآتية الى مقدار مكافئ له تحت جذر عام

$$\begin{array}{l|l} \overline{٧٢} + ٥٢ \quad (٤) & \overline{٣٢} + \overline{١١٢} \quad (١) \\ \overline{١٧٢} + ٥٢ - (٥) & \overline{٣٢} - \overline{١١٢} \quad (٢) \\ \overline{٧٢} + ٥٢ - (٦) & \overline{١٣٢} - \overline{١٧٢} \quad (٣) \end{array}$$

حول كل واحد من المقادير الآتية الى جذرين منفردين

$$\begin{array}{l|l} \overline{٢٦٠٢} - \overline{١٨٢} \quad (١١) & \overline{٦٠٢} + ٨٢ \quad (٧) \\ \overline{١٢٠٢} - \overline{١١٢} \quad (١٢) & \overline{٢٠٤٢} + ٢٠٢ \quad (٨) \\ \overline{٨٨٢} - \overline{١٣٢} \quad (١٣) & \overline{٨٨٢} + \overline{١٣٢} \quad (٩) \\ \overline{٢٧١٠} - \overline{١٥٢} \quad (١٤) & \overline{٢٢٤٢} + \overline{١٥٢} \quad (١٠) \end{array}$$

$$\text{اذا علم أن } \overline{٥٢} ٦ ١,٧٣٣٠٥ = \overline{٣٢} ٦ ١,٤١٤ ٢١ = \overline{٢٢}$$

$$= \overline{٧٢} ٦ ٢,٢٣٦٠٦ = ٢,٦٤٥٧٥ \text{ فما مقدار كل واحد من}$$

المقادير الآتية بدون اجراء عملية الجذر عليها

$$\begin{array}{l|l} \overline{٨٤٢} - \overline{١٠٢} \quad (١٨) & \overline{٢٤٢} + ٥٢ \quad (١٥) \\ \overline{٦٠٢} - ٨٢ \quad (١٩) & \overline{٥٦٢} + ٩٢ \quad (١٦) \\ \overline{١٤٠٢} - \overline{١٢٢} \quad (٢٠) & \overline{٨٤٢} + \overline{١٠٢} \quad (١٧) \end{array}$$

٣٦١ \* نذكر هنا أمثلة تحل بواسطة تعريف اللوغاريتم  
وخواصه العمومية السابق أيضاها بنمرة ١٩٢ وما يليها

(مثال ١) أوجد لوغاريتم  $\sqrt[3]{243}$  بالنسبة للأساس  $\sqrt[3]{3}$   
نرمز للوغاريتم المطلوب بحرف  $s$  فعلى حسب تعريف اللوغاريتم

$$\sqrt[3]{243} = (\sqrt[3]{3})^s \quad \text{يكون}$$

$$\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{3} (3) \quad \text{أو}$$

$$\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{0}{3} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{0}{3} \quad \text{ومن هذا ينص أن}$$

$$3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = s \quad \text{أى}$$

(مثال ٢) أوجد لوغاريتم  $\frac{1}{17}$  بالنسبة للأساس ٨١  
نرمز للوغاريتم المطلوب بحرف  $s$  فعلى حسب تعريف اللوغاريتم

$$\frac{1}{17} = 81^s \quad \text{يكون}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{3} \quad \text{أو}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{3}{3} \quad \text{أو}$$

$$- 4 = 3 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{3}{4} = s \quad \text{أى}$$

( مثال ٣ ) ما مقدار لوغاريتم ٢٥٦ بعد العلم بأن لو ٢ = ٠,٣٠١٠٣ =

$$\text{لو } ٢٥٦ = \text{لو } \frac{٢٥٦}{١٠٠٠} = \text{لو } ٢٥٦ - \text{لو } ١٠٠٠ = \text{لو } ٢ - \text{لو } ١٠٠٠ = ٠,٣٠١٠٣ - ٣ = -٢,٦٩٨٩٧$$

( مثال ٤ ) ما مقدار لو ٨ بعد العلم بأن لو ٢ = ٠,٣٠١٠٣ =

$$\text{معلوم انه } ٨ = ٢^٣ \text{ ف } \frac{٣ \times ٠,٣٠١٠٣}{٣ \times ١٠٠٠} = \frac{٠,٩٠٣٠٩}{٣٠٠٠} = ٠,٣٠١٠٣$$

$$\text{فيكون لو } ٨ = ٣ \times ٠,٣٠١٠٣ = ٠,٩٠٣٠٩$$

$$\text{أو } ٣ = \text{لو } ٢ + ٣ = \text{لو } ٨ - \text{لو } ١٠٠٠ = ٠,٩٠٣٠٩ - ٣ = -٢,٠٩٦٩١$$

$$٣ = (\text{لو } ٢ + \text{لو } ٣) - \text{لو } ١٠٠٠ = ٠,٩٠٣٠٩ - ٣ = -٢,٠٩٦٩١$$

$$٣ = (\text{لو } ٢ + \text{لو } ٣) - \text{لو } ١٠٠٠ = ٠,٩٠٣٠٩ - ٣ = -٢,٠٩٦٩١$$

$$٣,٩٥٤٢٤٢٦ - ٣,٤٣٨٣٨٤٠ =$$

$$\text{أو } ٠,٥١٥٨٥٨٥٨٦ =$$

( مثال ٥ ) المطلوب استخراج مقدار س من المعادلة الاتية

$$\text{مع العلم بأن لو } ٢ = ٠,٣٠١٠٣ =$$

$$\text{أو } ١٠ = ٣ - ٢ =$$

لذلك نأخذ لوغاريتم الطرفين فينتج

(٥ - ٣) سه = ١٠ لو (٧ - ٢) سه = ٢ لو <sup>٢</sup> تخلف الاقواس.  
ونلاحظ أن لو ١٠ = ١ فينتج

٥ - ٣ سه = ٧ لو ٢ - ٢ سه ٢ لو <sup>٢</sup> وبالتحويل والاختصار

ينتج ٥ - ٧ لو ٢ = (٢ - ٢) سه

فيكون سه =  $\frac{٧-٥}{٢-٣}$  نضع بدل لو ٢ مقداره

فينتج سه =  $\frac{٠.٣٠١٠٣ \times ٧ - ٥}{٠.٣٠١٠٣ \times ٢ - ٣}$

أو سه =  $\frac{٢.٢٨٩٢٧٩}{٢.٣٩٧٩٤}$

أو سه = ١,٢٠٦ مقربا الى ٠.٠٠١

(مثال ٦) - ما عدد أرقام المقدار <sup>٦٤</sup> بعد العلم بأن لو ٣ = ٠.٣٠١٠٣

نفرض أن <sup>٦٤</sup> = سه ثم نأخذ لو غاريتم الطرفين

فيكون لو سه = ٦٤ لو ٣

أو لو سه = ٦٤ × ٠.٣٠١٠٣

أو لو سه = ١٩,٢٦٥٦٤

ومن حيث أن العدد البياني من لو غاريتم سه هو ١٩. فيستدل منه.  
على أن سه يشمل على ٢٠ رقما صحيحا أعني أن عدد أرقام المقدار <sup>٦٤</sup>  
هو عشرون رقما .

## تمرين ٧٧

(١) اذا كان أساس جملة لوغاريتمية هو ٥٧ فما مقدار لوغاريتم كل من ٣ و ٦٢٥ و ٣٢٦ و ٠٠٠٠٠٠.

(٢) ما مقدار لوغاريتم كل من ١٠ و ٦ و ٠٠٠١ و ٠ اذا كان أساس الجملة اللوغاريتمية ١٠.

(٣) أوجد قيمة كل من لو ٧٢٩ و ٦ لو ١٢٥ و ٠.

(٤) » » لو  $\frac{1}{8}$  و لو  $\frac{1}{11}$

المطلوب إيجاد الأعداد التي لوغاريتماتها المقادير الآتية اذا كان الأساس لكل منها العدد المقابل له

(٥) اللوغاريتم  $\frac{1}{4}$  والأساس ٣٦ و اللوغاريتم ٢ والأساس ٥

(٦) » ٣ — » ٠٠٥ و ٣ » ١

(٧) » ١ — » ٣ — و ٢ » ١٣ و ٠

(٨) »  $\frac{3}{4}$  — » ١٠٠ و ٣ — » ٠٢ و ٠

اذا علم أن لو ٢ = ٠٣٠١٠٣ و لو ٣ = ٠٤٧٧١٢١٣ و لو ٧ = ٠٨٤٥٩٠٨٠ فأوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(٩) لو ٥١٢ و ٦ لو ٢٤٣ (١٢) لو ٣٠٨٨٨

(١٠) لو ١٠٢٩ و ٦ لو ١٤٤ (١٣) لو ١٨٦

(١١) لو ١٢٦ و ٦ لو ٦٤ (١٤) لو ٧٥٦

$$(١٥) \text{ لو } \frac{11}{13} + \text{لو } \frac{50}{143} + \text{لو } (2 \frac{3}{5}) \text{ بعد الاختصار}$$

$$» \text{ لو } \frac{70}{112} + \text{لو } (\frac{20}{13}) + \text{لو } (1 \frac{1}{3}) \text{ »}$$

$$» \text{ لو } \left( \sqrt{2 \times 108} : \sqrt{24} \times \sqrt{90} \right) \text{ »}$$

$$(١٨) \text{ لو } \left[ \left( \frac{1}{3} 122 \times \frac{1}{6} 1008 \right) : \left( \frac{1}{3} 126 \times \frac{1}{6} 108 \right) \right]$$

بعد الاختصار

$$(١٩) \text{ أوجد عدد الأرقام في تحليل المقدار } 10^4$$

$$(٢٠) \text{ أوجد عدد الأصفار التي بين الشرطة وأول رقم معنوي}$$

$$\text{في تحليل المقدار } \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$\text{أوجد مقدار المجهول في كل من المعادلات الآتية}$$

$$(٢١) 72 = 5^{-7} \times 5^{-6}$$

$$(٢٢) 108 = 5^{-4} : 5^{-9}$$

$$(٢٣) 81 = \frac{7}{5^{16}}$$

$$(٢٤) 8 = 3^{-5}$$

$$(٢٥) 1458 = 5^{2-7} 18 \times 5^{4-3} 12$$

$$\text{أوجد قيمة المقادير الآتية بواسطة اللوغاريتمات مع استعمال}$$

الجداول

$$(٢٦) 0,642 \times 4060 \quad 6,75 \times 26,42$$

$$(٢٧) 0,004023 \times 0,0407 \times 0,6406$$

$$\frac{2 \times 7041}{0.240 \times 8936} 6 \frac{704}{1228} (28)$$

$$^7 6745 6 ^3 2 \times ^8 68 (29)$$

$$^7 6740.1 6^{10} 1,000 (30)$$

$$^7 \left(\frac{7}{9}\right) 6 ^9 \left(\frac{1}{3}\right) (31)$$

$$\frac{128}{9607} \sqrt[4]{\phantom{0000}} \text{ و } \frac{23}{70087} \sqrt[3]{\phantom{0000}} (32)$$

$$\frac{0.42 \times 6732}{10} \sqrt[10]{\phantom{0000}} 6 \frac{5}{7} \sqrt[7]{\phantom{0000}} (33)$$

$$\frac{0678}{\phantom{0000}} \sqrt[8]{\phantom{0000}} 6 \frac{8496}{\phantom{0000}} \sqrt[3]{\phantom{0000}} (34)$$

$$\frac{0.061}{\phantom{0000}} \sqrt[7]{\phantom{0000}} \frac{67.8}{\phantom{0000}} \sqrt[7]{\phantom{0000}}$$

$$\frac{6789 \sqrt[0]{\phantom{0000}} 3 - 0739 \sqrt[3]{\phantom{0000}} 4}{6789 \sqrt[3]{\phantom{0000}} 3 - 63406 \sqrt[4]{\phantom{0000}} 40} (35)$$

المطلوب حل المجموعات الآتية

|  |  |
|--|--|
| $\begin{aligned} (39) \quad \text{لوسه} + \text{لوصه} &= 3 \\ 5 \text{ سه} - 3 \text{ صه} &= 6120 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} (36) \quad \text{لوسه} + \text{لوصه} &= 2 \\ \text{سه} - \text{صه} &= 10 \end{aligned}$                     |
| $\begin{aligned} (40) \quad \text{لوسه} + \text{لوصه} &= 2 \\ \text{سه} + \text{صه} &= 641 \end{aligned}$        | $\begin{aligned} (37) \quad \text{لوسه} + \text{لوصه} &= 38021 \\ 5 \text{ سه} - 3 \text{ صه} &= 18 \end{aligned}$           |
|  | $\begin{aligned} (38) \quad 2 \text{ لوسه} - \text{لوصه} &= 0.7770 \\ \text{لوسه} + 2 \text{ لوصه} &= 1,00630 \end{aligned}$ |



بمجد الله وعنايته وحسن توفيقه ورعايته تمت الطبعة الثانية لكتاب  
القواعد الجلية في الأعمال الجبرية وقد تعهدناه بما تقتضيه معاودة  
النظر من التمهيد والاصلاح فسددنا ما به من ثغور النقص وأصلحنا  
ما فيه من الخطأ بجاء جامعا بين برنامجي المعاهد الدينية العلمية الاسلامية  
والمدارس الثانوية المصرية مشتملا على تمارين عديدة تدريجية ومسائل  
متنوعة تطبيقية هي غاية هذا العلم المقصود وضالته المنشود

وأرجو من يعثر فيه على زلة من الأصل أو هفوة من الطبع أن  
يصلحها بفكره الشاقب ويحررها برأيه الصائب نسأل الله العظيم أن  
يوفقنا الى ما فيه المنفعة العامة وأن يجعله خالصا لوجهه الكريم وينفع  
به النفع العميم والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله مسك الختام

تحريرا في ٢٠ رجب سنة ١٣٣٠

محمد ادريس





| صحيحة سطر | الخطأ                                    | الصواب                                   | صحيحة سطر | الخطأ         | الصواب         |
|-----------|--|--|-----------|---------------|----------------|
| ١٧ ٤      | $\left(\frac{ب}{د} - \frac{ب}{ا}\right)$ | $\left(\frac{ب}{د} - \frac{ب}{ا}\right)$ | ٩١ ١٢     | + صه          | + صه           |
| ٣٢ ٣      | $\frac{ب}{١-٢}$                          | $\frac{ب}{١-٢}$                          | ١٠٥ ٢     | هـ للاول      | هـ للاول       |
| ٣٧ ١٠     | $\frac{س}{د}$                            | $\frac{س}{د}$                            | ١٠٦ ١٩    | $\frac{ب}{١}$ | $\frac{ب}{١}$  |
| ٤٦ ١٩     | سه = سه                                  | سه = سه                                  | ١١١ ٨     | $\frac{ع}{ط}$ | $\frac{ع}{ط}$  |
| ٥٠ ١٣     | خمسة                                     | خمسة                                     | ١٢١ ١٨    | $\frac{ق}{ر}$ | $\frac{ق}{ر}$  |
| ٥١ ١٣     | عاملين                                   | عاملين                                   | ١٢٤ ١٦    | ١٣٩ سه        | ٣٩ سه          |
| ٥٢ ١١     | بحرف                                     | بحرف                                     | ١٥٨ ١٦    | التوافق       | التوافق        |
| ٥٥ ١٥     | سه                                       | سه                                       | ١٥٨ ١٧    | حرف           | لا حرف         |
| ٥٨ ١٢     | $\frac{٢س}{٤}$                           | $\frac{٢س}{٤}$                           | ١٦٠ ١٨    | هذه           | هذه            |
| ٥٨ ١٢     | $\frac{٢س}{٤}$                           | $\frac{٢س}{٤}$                           | ١٦٠ ٢٠    | ماعددا        | ماعددا         |
| ٦٠ ٧      | سه                                       | سه                                       | ١٦٠ ٢٢    | جريدة         | جريدة          |
| ٦٠ ١٠     | ٢ - س                                    | ٢ - س                                    | ١٦١ ١     | ماعددا        | ماعددا         |
| ٦٢ ١٩     | ٣ ٤                                      | ٣٨٤                                      | ١٦١ ٧     | ماعددا        | ماعددا         |
| ٧٢ ١      | سه                                       | سه                                       | ١٦١ ١٣    | قارب واحد     | قارب منهم واحد |
| ٨٩ ٢٠     | سه                                       | سه                                       | ١٦٨ ١٢    | فددرجات       | فددرجات        |

| صحيحة سطر | الخطأ                  | الصواب                 | صحيحة سطر | الخطأ        | الصواب                 |
|-----------|------------------------|------------------------|-----------|--------------|------------------------|
| ١٧٣ ١٩    | $(س + ٣)^7$            | $(س + ٣)^7$            | ١٨٧ ١٣    | الجملة ويضاف | الجملة في الأشهر ويضاف |
| ١٧٤ ٢     | $(١ + \frac{٣}{٥})^٧$  | $(١ - \frac{٣}{٥})^٧$  | ١٩٠ ١١    | ١٦١ جنيها    | ٥٦١ جنيها              |
| ١٧٤ ١٠    | $(١ - س)^{١٢}$         | $(١ - س)^{١٢}$         | ١٩٠ ١٣    | حسب المدة    | احسب المدة             |
| ١٧٤ ١١    | $(٣س - \frac{١}{٢})^٩$ | $(٣س + \frac{١}{٢})^٩$ | ١٩١ ٢١    | النسبة       | النسبة                 |
| ١٧٨ ١٩    | في حد                  | في كل حد               | ١٩٢ ٢     | تعدادها      | تعدادها                |
| ١٨١ ٤     | $٣س + ١$               | $٣س - ١$               | ١٩٢ ٤     | ولو ١١٣٠,١٣  | ولو ١١٣٥٠,١٣           |

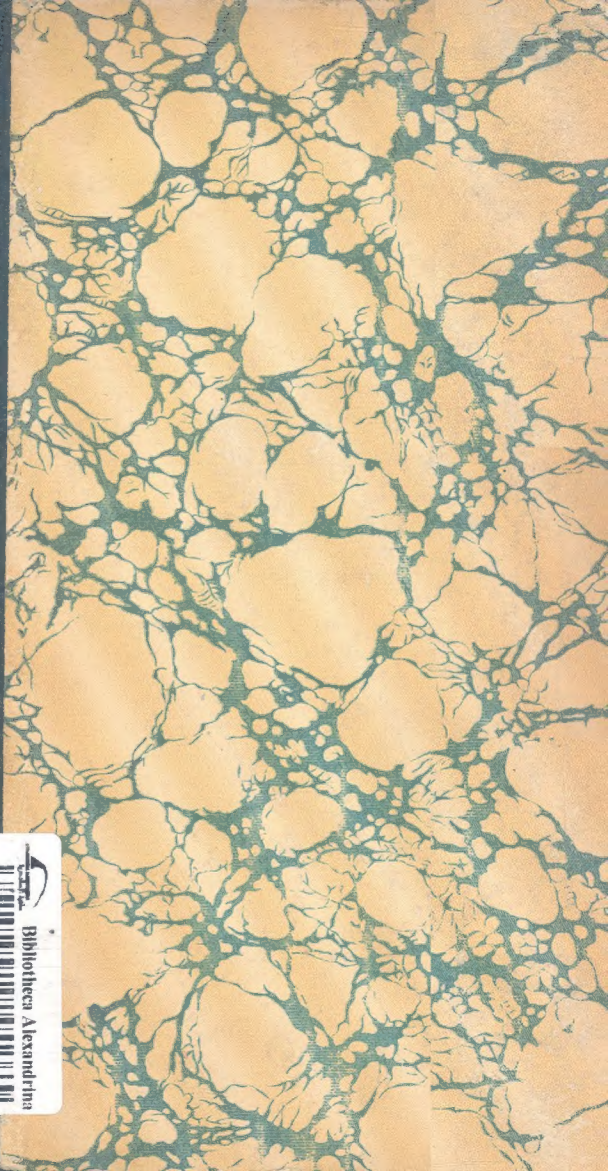
(۵۰۰۰/۱۹۱۱/۱۳۰/۲۰۲)











Bibliotheca Alexandrina



0558531